

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ім. Ігоря Сікорського»
Інженерно-хімічний факультет

МЕТОДОЛОГІЯ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
(назва навчальної дисципліни)

КУРС ЛЕКЦІЙ
для студентів денної та заочної
форми навчання
рівень вищої освіти третій (світньо-науковий)
спеціальність 133 Галузеве машинобудування
(шифр і назва)
освітня програма ОНП 133 Галузеве машинобудування

Київ – 2019

РОЗРОБНИК КУРСУ ЛЕКЦІЙ:

к.т.н., доцент кафедри Е та ТРП Плосконос Віктор Григорович
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище, ім'я, по батькові)

КУРС ЛЕКЦІЙ затверджено на засіданні кафедри Екології та технології
рослинних полімерів
(повна назва кафедри)

Протокол від «16» жовтня 2019 року № 2

Курс лекцій «**Методологія наукових досліджень**» належить до професійної підготовки за напрямком PhD.

Предметом курсу лекцій «Методологія наукових досліджень» є такі поняття, а саме: фізичні величини та їх вимірювання, нормальний закон розподілу випадкових величин, розрахунок похибок під час непрямих вимірювань фізичних величин, довірчий інтервал похибок, розроблення планів експериментальних досліджень та математичних моделей з використанням критеріїв максимальної інформативності.

Метою вивчення даного курсу дисципліни є формування у аспірантів комплексу знань в області планування експерименту та статистичної обробки результатів експериментальних досліджень і вимірювань під час дослідження складного об'єкта з предметної галузі.

Відповідно до мети підготовка докторів філософії за даною спеціальністю вимагає формування у аспірантів наступних **компетентностей**:

- здатність проводити критичний аналіз, оцінку і синтез нових та складних ідей;
- здатність розробляти та реалізувати проєкти, включаючи власні дослідження;
- здатність пропонувати концепції, моделі, винаходити й апробувати способи й інструменти професійної діяльності з використанням бази природничих, соціально-гуманітарних та економічних наук;
- здатність знаходити, обробляти й аналізувати необхідну інформацію для рішення проблем й прийняття рішень;
- здатність узагальнювати результати науково-технічної діяльності, готувати науково-технічні публікації за результатами виконаних досліджень.

Згідно з вимогами до курсу лекцій «Методологія наукових досліджень», студенти після її засвоєння мають продемонструвати такі **програмні результати навчання**:

- уміти застосовувати способи оптимального планування і реалізації експериментальних досліджень, теоретичного обґрунтування, критеріального, дисперсійного, математичного і комп'ютерного моделювання в екології;
- на підставі уявлень про методи проведення наукових досліджень обирати найбільш оптимальні методології проведення дослідницької роботи, проводити обробку та аналіз експериментальних та обчислювальних даних.

ЗМІСТ

Розділ 1. Фізичні величини та похибки під час їх вимірювання

Тема 1 Фізичні величини. Принципи і методи вимірювань фізичних величин

Тема 2 Попереднє знайомство з теорією похибок

Лекція № 1. Вимірювані фізичні величини. Принципи та методи вимірювань фізичних величин. Помилки – як похибки. Неминучість похибок. Як важливо знати похибки. Оцінка похибки при відліку зі шкали. Оцінка похибок у випадку багаторазових прямих вимірювань..... 7

Рекомендована література..... 23

Тема 3 Основні положення теорії похибок

Тема 4 Похибки в непрямих вимірюваннях

Лекція № 2. Найкраща оцінка $\pm$ похибка. Значущі цифри при визначенні похибок. Відмінність між результатами вимірювань. Порівняння двох значень: виміряного і теоретично відомого. Порівняння двох виміряних значень. Відносні похибки. Значущі цифри у відносних похибках. Множення двох виміряних значень..... 24

Рекомендована література.....40

Розділ 2 Методи статистичного аналізу випадкових похибок

Тема 1 Статистичний аналіз багаторазових вимірювань з випадковими похибками

Лекція № 3.

Випадкові та систематичні похибки. Середнє значення і стандартне відхилення. Стандартне відхилення – як похибка одиничного виміру. Стандартне відхилення середнього. Систематичні похибки для експериментальних досліджень в учбових лабораторіях.....41

Рекомендована література..... 63

Розділ 3. Обґрунтування та перевірка закону розподілу випадкових величин

Тема 1 Нормальний розподіл статистичної величини

Лекція № 4.

Гістограми і розподіл випадкових величин. Граничний розподіл випадкових величин. Нормальний розподіл випадкової величини.64

Рекомендована література.....74

Тема 2 Проблема відсіювання та об'єднання результатів вимірювань

Лекція № 5.

Проблема відсіювання даних. Критерій Шовене. Проблема об'єднання результатів різних вимірювань.....75

Рекомендована література..... 81

Розділ 4. Інформативність експерименту та математичні методи планування експериментальних досліджень

Тема 1 Інформативність експериментальних досліджень

Лекція 6. Поняття інформативності досліджуваного об'єкта. Класичний підхід до дослідження невідомого об'єкта. Планування експериментальних досліджень (класичне). Планування експериментальних досліджень за використання критеріїв інформативності.....82

Рекомендована література.....88

Тема 2 Моделювання складних технологічних систем

Лекція 7. Поняття моделювання складних технологічних систем в інженерній і науковій діяльності..... 89

Рекомендована література.....101

Лекція 8. Попередні дослідження технологічної системи. Класифікація факторів, що впливають на технологічну систему. Властивості досліджуваних факторів. Методи оцінювання сили впливу факторів на вихідний параметр. Метод експертних оцінок (рангової кореляції).....102

Рекомендована література.....113

Тема 3 Принципи математичної самоорганізації складних технологічних систем

Лекція 9. Принципи математичної самоорганізації складних технологічних систем. Метод групового врахування аргументів (МГУА). Критерії максимальної інформативності та шумостійкості експерименту. Методика обробки результатів експериментальних досліджень..... 114

Рекомендована література..... 120

Лекція 9 (дод.) МЕТОД САМООРГАНІЗАЦІЇ СКЛАДНИХ СИСТЕМ - НОВІ ТЕНДЕНЦІЇ В МАТЕМАТИЧНІЙ ТЕОРІЇ ЕКСПЕРИМЕНТУ (МТЕ).....121

Рекомендована література.....129

ВСТУП до курсу лекцій «Методологія наукових досліджень»

Основи методології наукових досліджень

Реальною формою розвитку науки є наукові дослідження.

Це є вивчення явищ і процесів, аналіз впливу на них різних чинників, а також вивчення взаємодії між явищами за допомогою наукових методів з метою отримання доведених і корисних для науки і практики рішень з максимальним ефектом.

Наукове дослідження - цілеспрямоване пізнання, результатом якого виступають система понять, законів і теорій.

Мета наукового дослідження - визначення конкретного об'єкта і всебічне, достовірне вивчення його структури, характеристик, зв'язків на основі наукових принципів і методів пізнання, впровадження у виробництво корисних результатів.

Розрізняють дві форми наукових досліджень: фундаментальні та прикладні.

Фундаментальні дослідження - наукова теоретична та (або) експериментальна діяльність, спрямована на здобуття нових знань про закономірності розвитку та взаємозв'язку природи, суспільства, людини.

Прикладні дослідження – це дослідження, які здійснюються в галузевих науково-дослідних (проектно-конструкторських) установах і спрямовані на здобуття та використання знань для практичних цілей.

Науковий результат - нове знання, одержане в процесі фундаментальних або прикладних наукових досліджень та зафіксоване на носіях наукової інформації.

Кожне наукове дослідження має об'єкт і предмет.

Якщо об'єктом наукового пізнання є матеріальний світ і форми його відображення в свідомості людей, то об'єктом наукового дослідження є певна частина дійсності - досить конкретний предмет чи явище, на яке спрямована наукова діяльність дослідника з метою пізнання його суті, закономірностей розвитку і можливостей використання в практичній діяльності.

Процес вибору об'єкта дослідження складний, оскільки значно впливає на цілеспрямованість і результативність наукового дослідження в цілому.

*Слід враховувати **особливості об'єкта дослідження**, які безпосередньо впливають на організацію і ефективність дослідної роботи, а саме:*

- обов'язковість непізнаних якостей об'єкта на час виникнення «проблемної ситуації»;
- динамічність (змінність) об'єкта дослідження;
- подільність об'єкта. Будь-яке завдання в зв'язку з наявністю багатьох властивостей об'єкта можна поділити на окремі відносно самостійні завдання, які вирішуються одними чи іншими методами і засобами дослідження в

певному порядку.

Предметом наукового дослідження можуть бути причини виникнення процесу або явища, закономірності його розвитку, різноманітні властивості, якості тощо.

У процесі наукового дослідження виділяють такі етапи:

- виникнення ідеї;
- формування понять, тверджень;
- висунення гіпотез;
- узагальнення наукових чинників;
- доведення правильності гіпотез і тверджень.

Основою розробки кожного наукового дослідження є методологія, тобто сукупність методів, способів, прийомів та їх певна послідовність, що прийнята для наукового дослідження.

Наукове дослідження має розглядатися в безперервному розвитку, ґрунтуватись на зв'язку теорії з практикою.

ЛЕКЦІЯ № 1 " Фізичні величини. Принципи і методи їх вимірювань.

Основи теорії ймовірностей та математичної статистики". Теорія похибок. Оцінка похибок"

План лекції:

- 1. Вимірювані фізичні величини;**
- 2. Принципи та методи вимірювань фізичних величин;**
- 3. Основи теорії ймовірностей та математичної статистики.**
- 4. Теорія похибок. Неминучість похибок; Як важливо знати похибки;**
- 5. Оцінка похибки під час відліку зі шкали;**
- 6. Оцінка похибок у випадку багаторазових вимірювань.**

1. ВИМІРЮВАНІ ФІЗИЧНІ ВЕЛИЧИНИ

Предметами пізнання можуть бути речовини, властивості та явища довкілля. Процес пізнання світу продовжується з моменту початку життєвої діяльності людини.

Основною характеристикою (мірою) довкілля є розміри простору у різних його напрямках (координатах), до яких відносять довжину, ширину, висоту. а також складніші міри (кут, площа, об'єм тощо). Тобто простір є багатомірним.

Будь-які події та явища природи відбуваються в **часі**, який також є певною мірою. Мірою інерційності є **маса** тіл, а мірою руху його молекул — **термодинамічна температура**.

Міцність характеризує різні матеріали (дерево, метали, скло, тканини, папір, картон, пластмаси тощо). Але кількісне значення міцності є для кожного матеріалу своє.

Кожну означену якісно властивість фізичних об'єктів (фізичних тіл, їх систем, станів, процесів), яка може мати певний розмір називають **фізичною величиною (або скорочено - ФВ)**.

Отже, прикладми ФВ є: довжина, маса, швидкість, прискорення, сила електричного струму чи опору, магнітна індукція, світловий потік тощо.

В Україні застосовуються одиниці вимірювання Міжнародної системи одиниць (SI), прийнятої Генеральною конференцією з мір та ваг і рекомендованої Міжнародною організацією законодавчої метрології, а саме:

1) основні одиниці SI:

метр як одиниця довжини (позначення одиниці: українське - м, міжнародне - m);

кілограм як одиниця маси (позначення одиниці: українське - кг, міжнародне - kg);

секунда як одиниця часу (позначення одиниці: українське - с, міжнародне - s);

ампер як одиниця сили електричного струму (позначення одиниці: українське - А, міжнародне - A);

кельвін як одиниця термодинамічної температури (позначення одиниці: українське - К, міжнародне - K);

моль як одиниця кількості речовини (позначення одиниці: українське - моль, міжнародне - mol);

кандела як одиниця сили світла (позначення одиниці: українське - кд, міжнародне - cd);

Розмір ФВ існує об'єктивно і незалежно від того, що ми про нього знаємо.

За характером зв'язку розмірів ФВ з об'єктами, яким вони притаманні, їх поділяють на **екстенсивні та інтенсивні ФВ**.

Екстенсивні ФВ (маса, довжина, площа тощо) в процесі ділення об'єкта на менші частини змінюють свої розміри та є адитивними величинами, тобто їх можна додавати та віднімати.

Інтенсивна ФВ характеризує стан фізичного об'єкта (густина, температура, твердість тощо) та не є адитивною, тобто їх не можна ні додавати ні віднімати після їх ділення.

ФВ, як і об'єкти, яким вони притаманні існують в просторі і в часі, перебуваючи в причинно-наслідкових зв'язках з іншими ФВ згідно з законами фізики. Тому розміри ФВ, як атрибути кожної з них, є функціями часу, координати простору тощо.

Розрізняють **скалярні та векторні ФВ**.

Скалярні ФВ можуть бути неполярними, що мають тільки розмір (маса, об'єм), і полярними, що мають ще і знак (заряд, потік).

Векторні ФВ (сила, переміщення, швидкість) поряд з розміром мають ще і напрямок і можуть визначати зміну розмірів інших ФВ у просторі (градієнт температури, напруженість електричного чи магнітного поля), або просторові зміни розмірів у часі (швидкість, прискорення).

Як розміри скалярних так і розміри чи (і) напрямки векторних ФВ бувають сталими та змінними. Але сталі в часі ФВ можуть бути змінними в просторі. Поняття сталості ФВ відносно тому, що рух абсолютний, а спокій відносний. Наприклад, розміри твердого тіла не є абсолютно сталими, оскільки матерія, що складається з молекул, атомів тощо, перебуває в безперервному русі і в наслідок цього розміри тіла теоретично є змінними. У зв'язку з еволюцією Всесвіту поступово змінюються навіть такі фізичні константи, як гравітаційна стала чи стала Планка.

Розміри ФВ можуть змінюватися неперервно чи стрибками (дискретно).

ФВ, розмір якої є функцією часу називають процесом, а стала фізична величина — граничний випадок процесу.

Розмір ФВ в певний момент часу називають миттєвим.

Множина розподілених в просторі і часі розмірів скалярної або розмірів і напрямків векторної ФВ утворює відповідно скалярне чи векторне поле ФВ.

Розглянемо поняття одиниці ФВ та види можливих значень ФВ. Всі можливі розміри ФВ X позначимо також через X , а з поміж них прийmemo розмір X_0 за одиницю фізичної величини X .

Відношення :

$$\frac{X}{X_0} = M \quad (1)$$

називають істинним числовим значенням ФВ X .

На підставі (1) істинне значення фізичної величини дорівнює її розмірові

$$X = MX_0 \quad (2)$$

Згідно з (1), якщо $X = X_0$, то $M = 1$, тобто розмір одиниці ФВ дорівнює такому істинному її значенню, для якого істинне числове значення дорівнює 1.

Одиниця ФВ — таке істинне значення ФВ, якому присвоєно істинне числове значення, що дорівнює 1.

Якщо одиницю ФВ взяти іншого розміру $X \neq X_0$ то згідно з (2) в силу об'єктивності існування розміру $M'X'_0 = X = MX_0$, а звідси

$$M' = \frac{X}{X'_0} = M \frac{X_0}{X'_0}$$

Тобто, істинне числове значення ФВ залежить від добору розміру її одиниці, а істинне значення від нього ж залежить, оскільки воно тотожно дорівнює її розміру.

Відмінність між поняттями розміру та істинного значення ФВ полягає в тому, що розмір ФВ не залежить від добору її одиниці, а істинне її значення є добутком істинного числового значення ФВ та дібраного розміру її одиниці.

В процесі вимірювання замість M отримують наближене до нього значення N , яке називають значенням ФВ, а замість X — значення величини $x = N \cdot X_0$, яке є тільки оцінкою істинного значення ФВ.

Значення ФВ, яке настільки близьке до істинного її значення, що для заданих умов може бути використане замість нього, називають дійсним значенням ФВ.

2. ПРИНЦИПИ ТА МЕТОДИ ВИМІРЮВАНЬ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН

Вимірювання — це знаходження значень ФВ дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів, які зберігають одиницю ФВ та дають змогу порівняти з нею вимірювану ФВ.

Вимірювання є пізнавальним процесом, який полягає у порівнянні вимірюваної ФВ з певним її значенням, що прийнято за одиницю.

Вимірювана інформація — це інформація про значення вимірюваних ФВ, а вимірюваний сигнал — це енергетичний носій вимірюваної інформації.

Пасивна (параметрична) ФВ, будучи матеріальним носієм інформації, не є сигналом, тому що вона сама не може проявити свій розмір. Її можна встановити, якщо створити з її допомогою вимірюваний сигнал та перетворити його так, щоб він набув форми, придатної для використання за призначенням.

Це здійснюють формуванням і перетворенням вимірюваних сигналів, модулюванням і кодуванням їх за допомогою засобів вимірювальної техніки і допоміжних технічних засобів, включно з обчислювальними.

Розрізняють аналогові та цифрові вимірювані сигнали.

Аналоговим називають неперервний за часом чи простором вимірюваний сигнал.

Дискретизований та квантований за рівнем аналоговий сигнал, будучи дискретним, після цифрового кодування стає цифровим.

За способом отримання інформації (вимірюваних сигналів) розрізняють **прямі, посередні (непрямі), сукупні та сумісні вимірювання.**

Прямі вимірювання — це безпосереднє порівняння ФВ з її одиницею (мірою).

Посередні (непрямі) вимірювання полягають в тому, що значення вимірюваної ФВ знаходять за допомогою залежності від ФВ, які отримують прямими вимірюваннями. Посередні вимірювання застосовують тоді, коли безпосереднє вимірювання ФВ неможливе чи недоцільне.

Сукупні вимірювання вимагають розв'язування системи рівнянь, складених за результатами одночасних вимірювань декількох однорідних ФВ.

Сумісні вимірювання полягають у вимірюванні двох і більше однорідних ФВ для встановлення залежностей між ними.

За характером змін вимірюваної ФВ в процесі вимірювань розрізняють **статичні, динамічні та статистичні вимірювання.**

Статичні вимірювання здійснюють для сталих за значенням ФВ.

Динамічні — для змінних у часі ФВ.

Статистичні вимірювання використовують для дослідження показників випадкових процесів (чим ми і будемо, в основному, займатися в курсі "Основи теорії похибок").

За кількістю вимірюваної інформації вимірювання поділяють на **однократні та багатократні.**

Для однократних вимірювань їх кількість дорівнює кількості вимірюваних ФВ. Вони здебільшого спряжені зі значними величинами можливих похибок. Тому в практиці вимірювань рекомендують здійснювати **не менше ніж три однократні вимірювання, а за результат брати середнє арифметичне їх значення.**

Багатократні вимірювання характеризуються перевищенням кількості вимірювань над кількістю вимірюваних ФВ. їх перевагою є менший вплив на результат вимірювань випадкових впливових ФВ.

Методи здійснення вимірювань поділяють на абсолютні та відносні.

Абсолютними називають такі вимірювання, для здійснення яких використовують **прямі вимірювання однієї чи декількох основних ФВ** та фізичну константу. Наприклад, вимірювання лінійних розмірів за допомогою лінійки, штангенциркуля, мікрометра тощо.

Відносні вимірювання здійснюють на підставі відношень вимірюваної ФВ до однорідної з нею ФВ, що прийнята за умовну одиницю ФВ.

Умовна одиниця ФВ встановлюється за допомогою стандартної одиниці однорідної ФВ. Наприклад, за умовну одиницю для вимірювання значних лінійних розмірів приймають предмети (лінійки, бруски тощо) зі значеннями розмірів близькими до вимірюваної та встановленими за допомогою стандартної одиниці метра чи кратних одиниць.

Різницю між вимірюваною фізичною величиною та умовною одиницею вимірюють за допомогою вимірювальних стандартних приладів для малих значень розмірів, а результат вимірювання розраховують як суму умовної одиниці та показів вимірювального приладу,

Під час проведення вимірювань користуються терміном шкала вимірювань, як впорядкованої сукупності значень ФВ, що служить основою для її вимірювань.

Наприклад, для шкали вимірювання температури за Цельсієм початком її відліку приймають температуру танення льоду, а за опорну точку — температуру кипіння води. Одну соту частину цього інтервалу називають градусом Цельсія. В температурній шкалі Фаренгейта початком відліку є температура танення суміші льоду та нашатирного спирту (або кухонної солі), а за опорну точку взято нормальну температуру здорової людини. Одиницею температури за Фаренгейтом є одна дев'яноста шоста частка вказаного інтервалу. За цією шкалою температура танення льоду дорівнює $+32^{\circ}\text{F}$, а температура кипіння води — $+212^{\circ}\text{F}$. Тому за Цельсієм різниця між температурою кипіння води і топлення льоду дорівнює 100°C , а за Фаренгейтом — 180°F .

Звідси видно вплив прийнятої шкали, як на значення вимірюваної ФВ, так і в аспекті забезпечення єдності вимірювань. Для порівняння результатів вимірювань потрібно знати відношення розмірів одиниць ФВ за відповідними шкалами, тобто і $^{\circ}\text{F}/^{\circ}\text{C}$.

На практиці застосовують **декілька різновидів шкал**:

- шкала назв (наприклад, кольорів);
- шкала порядку (наприклад, для землетрусів — в балах);
- шкала інтервалів (наприклад, різниць часу, довжини тощо);
- шкала відношень тощо.

Експериментатор отримує результати спостережень, які можуть бути одно-кратними або багатократними.

Вони можуть стати **результатами вимірювання, в якості значення ФВ**, тільки після відповідного їх оброблення з визначенням точності та форми подання цього результату.

Результат вимірювання — це знайдене значення вимірюваної ФВ із стандартною оцінкою його точності.

Точність визначається характеристиками похибки (або невизначеності) вимірювань.

Принципом вимірювання називають сукупність явищ, які використовують для цього. Наприклад, термоелектричний ефект використовують для вимірювання температури чи ефект Холла — для вимірювання напруженості магнітного поля.

Метод вимірювання — це спосіб використання принципів і засобів вимірювання.

Методика виконання вимірювань — сукупність процедур і правил, виконання яких забезпечує одержання результатів вимірювань з заданою точністю.

Вимірювання є практично порівнянням ФВ. Вони можуть здійснюватись одночасного та різночасно за допомогою вимірювальних приладів, шкали яких проградуєвані в одиницях вимірюваних фізичних величин.

Розрізняють такі методи порівняння: компенсаційні, протиставлення, заміщення, збігання, диференціальний та нульовий.

Компенсаційний метод вимірювання полягає в тому, що на вхід пристрою порівняння (компаратора) одночасно подають дві ФВ — полярну чи векторну вимірювану та зразкову, розмір якої відтворюється мірою, а співвідношення між її розмірами визначають за вихідним сигналом приладу порівняння. Наприклад, вимірювання напруги постійного струму здійснюють за допомогою компенсатора шляхом порівняння її з ЕРС нормального елемента.

Метод протиставлення здійснюють одночасним подаванням вимірюваної та зразкової ФВ на два різні входи двоканального компаратора (приладу порівняння), за вихідним сигналом якого визначають співвідношення між розмірами цих величин. Наприклад, зважування на рівноплечих терезах.

У методі заміщення вимірювану та зразкову ФВ подають по чергово на прилад порівняння. Наприклад, вимірювання опору за допомогою мостової схеми з застосуванням точного магазину опору.

Метод збігання полягає в тому, що різницю між ефектами, зумовленими дією вимірюваної та зразкової ФВ, визначають за збіганням шкал чи вимірюваних сигналів. Наприклад, вимірювання лінійних розмірів за допомогою штангенциркуля чи частоти обертання за допомогою стробоскопа.

Диференціальний метод вимірювання полягає в тому, що вимірювальним приладом вимірюють різницю вимірюваної X та зразкової X ФВ, а результат вимірювання визначають як $X = X + \Delta X$.

Нульовий метод вимірювання відрізняється від диференціального тим, що за допомогою зміни зразкової ФВ різницю ΔX доводять до нуля, а вимірювану ФВ знаходять за значенням зразкової.

3. Основи теорії ймовірностей та математичної статистики

Всі події в природі можуть бути розподілені на три групи:

- події **достовірні**, тобто ті, які обов'язково відбудуться;
- події **неможливі**, тобто ті, які не можуть відбутися;
- події **випадкові**, які займають проміжне становище між достовірними та неможливими подіями.

У зв'язку з невизначеністю в появі випадкової події для її характеристики вводиться поняття **ймовірності**.

Якщо ймовірність достовірної події взяти за одиницю (100%), а неможливої — за нуль (0%), то **ймовірність випадкової події буде знаходитися між нулем і одиницею** (між нулем і 100%).

В дослідженнях, які ми проводимо в целюлозно-паперовій промисловості, ми, зазвичай, маємо справу з випадковими подіями.

Числовим вираженням випадкової події є випадкова величина.

В ході проведення досліджень експериментатор отримує результати вимірювань випадкової величини.

Генеральною сукупністю називають весь набір мислимих значень випадкової величини.

Поняття безкінечної генеральної сукупності – математична абстракція, як і уява про те, що виміряти випадкову величину можливо безкінечне число разів.

Частина генеральної сукупності, яку експериментатор отримує під час проведення досліджень (вимірювань випадкової величини) називають **вибіркою**.

На практиці під час експериментального вивчення різних явищ дослідник, зазвичай, не має в своєму розпорядженні істинних значень характеристик випадкової величини (неможливо отримати генеральну сукупність), тому доводиться оцінювати характеристики на основі вибірки експериментальних даних.

Такі оцінки характеристик випадкової величини є наближеними і їх **називають вибірковими оцінками**.

Таким чином, **характеристики розподілу ймовірностей в генеральній сукупності називають параметрами, а вибіркові значення характеристик – оцінками або статистиками**.

Параметри прийнято позначати буквами грецького алфавіту, а оцінки-буквами латинського алфавіту.

4. Теорія похибок. Неминучість похибок; Як важливо знати похибки

Теорія похибок – це процес вивчення та оцінки неточностей у вимірюваннях.

Життєвий досвід показує, що жодне вимірювання, як би ретельно воно не проводилося, не може бути зовсім вільним від неточностей (похибок).

Оскільки в основі будь-якої наукової дисципліни, а також під час застосування результатів наукових досліджень лежать вимірювання, винятково важливо вміти розраховувати ці похибки та зводити їх до мінімуму.

У даній лекції ми розглянемо деякі приклади простих вимірювань, на яких ілюструється **неминучість появи експериментальних похибок** і показується, як важливо знати їх величину, наскільки значні ці похибки.

У подальших лекціях ми розглянемо, принаймні на декількох простих прикладах, як можна правильно розраховувати величини експериментальних похибок.

У науці слово "помилка" не має зазвичай значення чогось неправильного. **"Помилка" у науковому розумінні означає неминучу похибку, що супроводжує всі вимірювання.**

Помилки як такі не можна віднести до промахів експериментатора. Ви не зможете уникнути їх, навіть намагаючись бути дуже уважним.

Краще, на що ви можете розраховувати,- це звести похибку до можливого мінімуму і надійно розрахувати її величину.

У наших лекціях ми будемо використовувати слово "помилка" винятково в значенні "похибка", вважаючи ці два слова рівнозначними.

Щоб показати неминучість появи похибок, ми повинні лише ретельно

проаналізувати будь-яке повсякденне вимірювання.

Розглянемо в якості приклада дії столяра, який щоб установити двері, повинен **виміряти висоту дверного пройому**.

Проводячи прикидку, він міг би просто глянути на дверний проїом і оцінити його висоту в 210 см. Це грубе "вимірювання" явно містить похибку. За необхідності столяр міг би врахувати цю похибку, допускаючи, що висота може бути і меншою (205 см), і більшою (215 см).

Якби він захотів зробити більш строге вимірювання, він міг би використати рулетку і визначити, що висота дорівнює 211,3 см. Це вимірювання явно є більше точним, ніж його перша прикидка, але і воно, мабуть, містить деяку похибку, оскільки неймовірно, щоб він міг знати, що висота дорівнює точно 211,30 см, а не, наприклад, 211,31 см.

Є багато причин, що впливають на цю похибку, яка існує (незалежно від нашого бажання).

Частину з них ми будемо розглядати у цьому курсі лекцій. Деякі із джерел похибок можна з б усунути, якби столяр віднісся більш ретельно до вимірювання. Наприклад, одним із джерел похибки могло бути погане освітлення, що утрудняє зчитування з рулетки. Цю причину похибки можна було б усунути, поліпшивши освітлення.

З іншого боку, **деякі із джерел похибки притаманні самому процесу вимірювання і ніколи не можуть бути повністю усунуті**.

Наприклад, припустимо, що рулетка столяра проградуйована напівсантиметровими поділками. Верх дверного пройому, цілком ймовірно, не збігається точно з жодним з напівсантиметрових поділок. У цьому випадку столяр повинен оцінити положення верху пройому між двома поділками. Якщо ж верх пройому збігся з однією з поділок, то, з огляду, що сама поділка має ширину порядку міліметра, він повинен оцінити положення верху в межах поділки. У кожному разі столяр повинен в остаточному підсумку оцінити, де лежить верх дверного пройому відносно поділок на його рулетці, і це призводить до деякої похибки в його відліку.

Купивши іншу більш точну рулетку із більш дрібними поділками, столяр може зменшити похибку, але не може її повністю усунути. Якби він вирішив визначити висоту пройому з найкращою точністю, яка відповідає сучасному технічному рівню, він міг би купити дорогий лазерний інтерферометр. Але навіть точність інтерферометра обмежена величиною порядку довжини хвилі світла (близько $0,5\text{-}10^{-6}$ м). Хоча тепер столяр мав би можливість проводити вимірювання з фантастичною точністю, йому все-таки не вдалося б абсолютно точно визначити висоту дверного пройому.

Більше того, прагнучи досягти ще більш високої точності, наш столяр зіштовхнеться з важливою і принциповою проблемою. Він явно виявить, що

висота в різних місцях різна. Навіть на тому самому місці він виявить, що висота змінюється, якщо змінюється температура та вологість або навіть якщо він випадково зітре тонкий шар пилу. Інакше кажучи, він виявить, що не існує такої величини, як висота дверного проїому.

Такого роду проблема називається проблемою визначення (висота дверного проїому не є точно обумовленою кількісною характеристикою). **Вона відіграє важливу роль у багатьох наукових вимірюваннях.**

Досліди нашого столяра ілюструють відому істину.

Ні одну фізичну величину (довжину, час, температуру в т.д.) не можна виміряти з повною впевненістю. Ціною певних зусиль ми можемо звести похибки до дуже малих значень, але виключити їх повністю неможливо.

У повсякденних вимірюваннях ми зазвичай не утруднюємо себе темою обговорення похибок. Іноді похибки просто не мають значення. Якщо ми говоримо, що відстань між будинком і школою дорівнює 3 км, то (у більшості випадків) не важливо, чи вона знаходиться "між 2,5 і 3,5 км" або "між 2,99 і 3,01 км".

Часто похибки важливі, але їх не можна оцінити інтуїтивно без точного аналізу. Коли наш столяр почне підганяти двері, він повинен знати їхню висоту з похибкою порядку 1 мм. Зрештою, оскільки похибка значуща, двері (практично у всіх випадках) будуть добре підігнані і його інтерес до теорії похибок відпаде.

4.1 Як важливо знати похибки

Наш приклад з столяром, який має виміряти дверний проїом, ілюструє виникнення похибок у вимірюваннях.

Тепер ми розглянемо приклад, що більш чітко показує, наскільки **важливо знати величину цих похибок.**

Припустимо, що ми зіштовхнулися із проблемою, яку, як говорять, вирішував Архімед. А саме: будемо вважати, що нас попросили визначити з чого виготовлена корона: з 18-каратного золота¹⁾, як нам про це заявили, або ж з більш дешевого сплаву.

Наслідуючи Архімедові, ми вирішили визначити щільність матеріалу корони, знаючи, що 18-каратне золото і невідомий сплав мають відповідні щільності:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{золото}} &= 19,3 \text{ г/см}^3 \\ &\text{і} \\ \rho_{\text{сплав}} &= 13,6 \text{ г/см}^3 \end{aligned}$$

Якби ми могли виміряти щільність корони $\rho_{\text{корони}}$, то (відповідно до гіпотези Архімеда) можна було б вирішити, чи дійсно це золота корона, порівнюючи $\rho_{\text{корони}}$ з невідомими щільностями $\rho_{\text{золото}}$ та $\rho_{\text{сплав}}$.

Припустимо, що ми звернулися до двох експертів з визначення щільності. Експерт А зміг швидко виміряти $P_{\text{корона}}$ і повідомити, що його найкраща оцінка для $P_{\text{корона}}$ дорівнює 15 і що $P_{\text{корона}}$ практично вірогідно лежить в інтервалі між 13,5 і 16,5 г/см³.

Експерт Б зміг попрацювати трохи довше, але потім оголосити свою найкращу оцінку - 13,9 і ймовірний інтервал від 13,7 до 14,1 г/см³. Результати наших двох експертів можна звести в табл. 1.

Таблиця 1. Щільність корони (г/см³)

Вимірювана величина	Експерт А	Експерт Б
Найкраща оцінка для $P_{\text{корона}}$	15	13,9
Ймовірний інтервал $P_{\text{корона}}$	13,5-16,5	13,7-14,1

Стосовно цих результатів варто зробити два зауваження.

По-перше, хоча виміри експерта Б значно точніші, дані експерта А, імовірно, також правильні.

Кожний експерт приводить інтервал, у якому, як він упевнений, лежить $P_{\text{корона}}$, і ці інтервали перекриваються. Таким чином, цілком імовірно (і фактично так воно і є), що обидва виміри правильні.

З іншого боку, похибка у вимірах експерта А настільки велика, що його результати просто марні. Значення щільності 18-каратного золота (15,5) і сплаву (13,8) потрапляють в інтервал від 13,5 до 16,5 г/см³, так що виміри цього експерта не дозволяють зробити ніякого висновку.

З іншого боку, виміри експерта Б ясно показують, що корона не справжня. Щільність передбачуваного експертом Б сплаву 13,8 входить до інтервалу від 13,7 до 14,1, у той час як щільність 18-каратного золота (15,5), явно не потрапляє в цей інтервал.

Очевидно, якщо на основі результатів вимірювань потрібно робити певні висновки, то експериментальні похибки не повинні бути занадто великими.

Разом з тим, немає необхідності для того, щоб похибки були дуже малі. Стосовно цього наш приклад типовий для багатьох наукових вимірювань, у яких похибки повинні бути розумно малі (можливо, кілька відсотків від вимірюваної величини), але надмірна точність часто є зайвою.

¹⁾ **18-каратне золото** – це сплав, на 24 частини якого приходить 18 частин благородного металу і 6 частин кольорових металів.

Зважаючи на те, що наше рішення ґрунтується на результатах експерта Б, які показують, що $R_{\text{корона}}$ лежить між 13,7 і 14,1 г/см³, то важливо одержати від експерта Б переконливі докази, щоб ми повністю повірили в його результати.

Інакше кажучи, **експериментатор повинен довести правильність величини вибраного ним інтервалу.**

Цей момент часто ігнорується починаючими дослідниками, які просто стверджують, що його похибка дорівнює 1 мм або 2 с і т. п., ігноруючи будь-які докази.

Просте підтвердження похибки без короткого і зрозумілого пояснення способу її оцінки найчастіше не має ніякого резону.

Найбільш важливий висновок щодо вимірювань наших двох експертів полягає в наступному: подібно більшості наукових вимірювань, обидва виміри були б марними, якби вони не супроводжувалися надійною інформацією щодо їхніх похибок.

Дійсно, **якби ми мали тільки інформацію, що розміщена у верхньому рядку табл. 1, то ми не тільки не могли б зробити який-небудь правильний висновок. разом з тим, ми фактично були б введені в оману, тому що результат експерта А (15 г/см³) наштовхував би на припущення, що корона справжня.**

Інші приклади

Приклади, які ми обговорювали попередньо, являють собою яскраве введення до деяких основних положень теорії похибок.

Вони були обрані не тому, що дуже важливі, і можна вибачити тому, хто вважає їх надуманими.

Разом з тим, легко привести приклади, які винятково важливі, наприклад, в області будь-якої прикладної або фундаментальної науки.

У прикладних науках інженер, конструюючи ядерну силову установку, повинен знати характеристики матеріалів і ядерного пального, які він збирається використовувати.

Виробникові кишенькового калькулятора необхідно знати характеристики його різних електронних складових.

Технологу, який планує виготовити міцну картонну тару, повинен бути впевненим у результатах випробування на міцнісні характеристики картону, з якого ця тара буде виготовлятися.

У кожному разі спеціаліст повинен виміряти необхідні параметри, а вимірявши їх, визначити ймовірність своїх результатів. Ось тут і потрібне **застосування теорії похибок.**

Інженери, зайняті забезпеченням безпеки літаків, поїздів або автомобілів, повинні розбиратися в похибках часу реакції водіїв, у гальмівних шляхах і ще в

безлічі інших речей. І помилка в розрахунках величини похибки може призвести до нещасних випадків.

Навіть в області, далекої від науки, такий, як пошиття одягу, теорія похибок у вигляді контролю якості відіграє вирішальну роль.

У фундаментальних науках теорія похибок має ще більш важливе значення.

Коли пропонується будь-яка нова теорія, вона повинна бути перевірена на ряду з більш ранніми в ряді експериментів, адже нова і стара теорії прогнозують різні результати.

У принципі потрібно поставити експеримент, результати якого дозволяють зробити вибір між теоріями, що суперечать. На практиці положення ускладнюється наявністю неминучих експериментальних похибок. Всі ці похибки необхідно ретельно враховувати і зменшувати до тих пір, поки експеримент не дозволить вибрати одну прийнятну теорію.

Інакше кажучи, експериментальні результати з врахуванням їх похибок, повинні перебувати в узгодженні із прогнозами однієї теорії і розходитися з даними всіх відомих альтернативних варіантів.

Очевидно, успіх такої процедури вирішальним образом залежить від розуміння вченим теорії похибок і його здатності переконати інших у правильності свого розуміння.

Відомий приклад такого роду перевірки наукової теорії - вимір відхилення променя світла зірки, що проходить поблизу Сонця. Коли Ейнштейн в 1916 р. опублікував свою загальну теорію відносності, він відзначив, що, відповідно до прогнозів цієї теорії, світло від зірки, проходячи поблизу краю Сонця, буде відхилитися на кут $\alpha = 1,8''$. Домінуюча на той час класична теорія не показувала ніякого відхилення ($\alpha = 0$), а більш ретельний розгляд із класичних позицій давав (як указав сам Ейнштейн в 1911 р.) відхилення на кут $\alpha = 0,9''$. В принципі необхідно було лише спостерігати зірку, коли вона зрівняється із краєм диска Сонця, і виміряти кут відхилення α . Якби результат був $\alpha = 1,8''$, те загальна теорія відносності була б підтверджена (принаймні для цього явища). Якби кут α дорівнював 0 або $0,9''$, те загальна теорія відносності виявилася б невірною, а правильною була б одна з більше ранніх теорій.

На практиці вимір відхилення світла Сонцем винятково утруднений і можливий тільки під час сонячних затемнень. Проте експеримент був успішно проведений в 1919 р. Дайсоном, Еддінгтоном і Девідсоном. Їхня найкраща оцінка склала $\alpha = 2''$ і вони розраховали, що з імовірністю 95% відхилення лежить у межах від $1,7''$ до $2,3''$. Очевидно, цей результат виявився підтвердженням загальної теорії відносності і суперечив кожній із більш ранніх теорій. Отже, він переконливо підтвердив ейнштейнівську загальну теорію відносності.

Протягом деякого часу цей результат вважався спірним. Багато хто припускав, що похибки сильно недооцінені і, отже, експеримент непереконливий. Наступні експерименти підтвердили розрахунки Ейнштейна у виправдали висновок Дайсона, Еддінгтона і Девідсона.

Важливий момент полягає в тому, що рішення всього питання залежало від здатності експериментатора вірогідно оцінити всі похибки і переконати інших, що це зроблено правильно.

Студент у фізичній або хімічній лабораторії зазвичай не в змозі виконувати якісні перевірки нових теорій. По-перше лабораторні установки рідко коли дозволяють це зробити. З іншого боку, багато експериментів у лабораторії задумані як тести існуючих теоретичних передумов. З першого погляду такий тип експерименту може здатися надуманим і беззмстовним, оскільки ці теорії, мабуть, були перевірені багато разів зі значно більшою точністю, ніж це можливо в навчальній лабораторії. Проте якщо студент розуміє вирішальну роль теорії похибок, і приймає виклик по виконанню найбільш точних перевірок, які можливі за наявного устаткування, то такі експерименти можуть бути цікавими та повчальними.

5. Оцінка похибки під час відліку зі шкали

Таким чином, ми розглянули декілька прикладів, які ілюструють, чому кожне вимірювання містить похибки і чому важливо знати їхню величину.

Але, разом з тим, ми ще не обговорювали, як **фактично можна оцінити величину похибки.**

На практиці така оцінка може бути досить складною, може бути простою, коли похибку можна оцінити на основі лише здорового глузду.

Оцінка похибки і становить головний предмет нашого курсу лекцій.

Розглянемо два приклади простих вимірювань. Розуміння цих прикладів дозволить приступити до використання теорії похибок у своїх експериментальних дослідженнях, а нам створить основу для подальших викладів.

Наш перший приклад - вимірювання з використанням маркованої шкали, такої, як на лінійці, що на рис. 1 або у вольтметра на рис. 2.



Рис.1 Вимірювання довжини олівця з допомогою лінійки

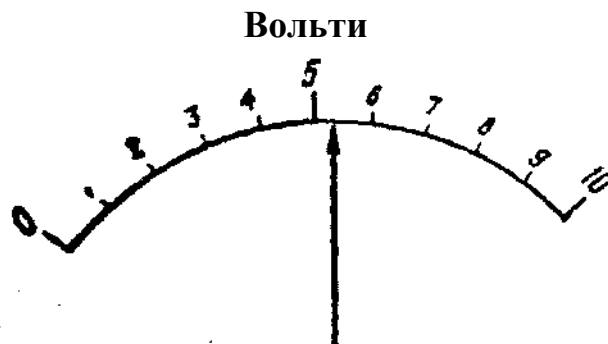


Рис.2 Відлік зі шкали вольтметра

Щоб виміряти довжину олівця (див. рис. 1), ми повинні спочатку поєднати торець олівця з нулевою поділкою лінійки і потім визначити, де буде знаходитися його вістря на шкалі лінійки. А щоб виміряти напругу (див. рис.2), ми повинні визначити те місце на шкалі вольтметра, куди вказує стрілка.

Якщо припустити, що точність показань лінійки і вольтметра гарантуються (тобто вони **повірені** спеціалістами відповідних служб), то головне завдання в кожному із цих двох випадків - визначити, де розташовується певна точка стосовно відміток шкали.

Поділки на лінійці (рис. 1) розміщені досить близько одна до одної (з інтервалом в 1 мм). Експериментатор цілком розумно міг би визначитися, що довжина олівця, без сумніву, ближче до 36 мм, ніж до 35 або 37 мм, і що більш точний відлік неможливий. Отже, він міг би сформулювати свій висновок як:

найкраща оцінка довжини $= 36 \text{ мм}$
імовірний інтервал $35,5\text{-}36,5 \text{ мм}$

і сказав би, що він виміряв довжину до найближчої міліметрової поділки.

Такий тип висновку - що величина лежить ближче до даної поділки, ніж до кожної із сусідніх, - є досить загальним.

Із цієї причини багато вчених додержуються угоди, відповідно до якої твердження $l = 36 \text{ мм}$ без додаткових пояснень означає, що l ближче до 36, ніж до 35 або 37 мм, тобто.

$$l = 36 \text{ мм}$$

означає

$$35,5 \text{ мм} \leq l \leq 36,5 \text{ мм}.$$

Подібним же чином запис типу $x = 1,27$ без надання будь-якої похибки відповідно до угоди означає, що x лежить між 1,265 і 1,275.

У наших лекціях ми не будемо додержуватися такої угоди і завжди будемо вказувати наші похибки явно .

Разом з тим, для студентів важливо розуміти, що така угода є і знати, що вона використовується стосовно будь-якого результату вимірювання, наведеного

без похибки

Особливо важливо знати про цю угоду, коли широко використовуються кишенькові калькулятори, які можуть показувати багато цифр після точки в процесі ділення. Якщо студент сліпо перепише із свого калькулятора, скажімо, число 123,456 без якого-небудь пояснення, то людина, що бачить це число, зобов'язана прийняти, що число є точним до шести значущих цифр, а це видається малоймовірним.

Поділki на шкалі вольтметра, показаного на рис. 2, розташовані набагато рідше, ніж на лінійці. У цьому випадку більшість погодилися б, що можна добитися більшого, ніж просто ідентифікувати поділку, до якої стрілка ближче всього. Оскільки проміжки між поділками досить значні, можна впевнено оцінити, у якому місці між поділками перебуває стрілка.

Таким чином, розумний висновок про вимірювану напругу може мати вигляд:

$$\begin{array}{ll} \text{найкраща оцінка напруги} & = 5,3 \text{ В,} \\ \text{імовірний інтервал} & 5,2\text{-}5,4 \text{ В.} \end{array}$$

Процес визначення положень між поділками шкали називається **інтерполяцією**. Ця важлива навичка вдосконалюється із практикою.

Інші спостерігачі могли б не погодитися з оцінками точності, що задаються співвідношеннями (1) і (2). Зокрема, хтось міг би вирішити, що можна вдатися до інтерполяції під час вимірювання довжини на рис 1 і виміряти її з меншою похибкою, ніж наведено в співвідношенні (1).

Проте лише незначна кількість спеціалістів стала б заперечувати, що співвідношення (1) і (2) розумно оцінюють відповідні величини і їхні ймовірні похибки.

Таким чином, ми бачимо, що **наближена оцінка похибок** представляє **досить легке завдання** у випадку, коли єдиною проблемою є **визначення положення точки на маркованій шкалі**.

6. Оцінка похибок у випадку багаторазових вимірювань

В більшості вимірювань присутні похибки, які значно складніше оцінити, ніж похибки, пов'язані з визначенням положення точки на шкалі.

Наприклад, коли ми вимірюємо певний інтервал часу за допомогою секундоміра, головним джерелом похибок є не зчитування результату із циферблата, а наш власний невизначений час реакції під час запуску та зупинки стрілки секундоміра.

Такого роду похибки в більшості випадків можна надійно оцінити, якщо повторити вимірювання декілька разів.

Припустимо, наприклад, що ми вимірюємо період коливань математичного маятника один раз і одержуємо в результаті 2,3 с.

З одного вимірювання не можна багато сказати про експериментальну похибку.

Але якщо ми ще один раз повторимо вимірювання і одержимо 2,4 с, то можна сказати, що похибка, імовірно, порядку 0,1 с.

Якщо послідовність чотирьох вимірювань дає результати (у секундах)

$$2,3; 2,4; 2,5; 2,4, \quad (3)$$

то ми можемо зробити досить правдоподібні оцінки.

По-перше, природно припустити, що істинною оцінкою періоду коливань маятника буде середнє значення 2,4 с (ми пізніше переконаємося, що найкраща оцінка, заснована на декількох вимірюваннях, є майже завжди середнє результатів вимірювань).

По-друге, представляється досить розумним припущення, що очікуване значення для періоду коливань лежить десь між найменшою величиною 2,3 і найбільшою 2,5. Таким чином, ми могли б цілком резонно погодитись, що

$$\begin{aligned} \text{найкраща оцінка} &= \text{середнє} = 2,4 \text{ с}, & (4) \\ \text{імовірний інтервал} &2,3-2,5 \text{ с}. \end{aligned}$$

У випадку, коли ми **можемо повторити те саме вимірювання декілька разів, розбіжність в вимірюваних значеннях надає важливу інформацію про похибки в наших вимірюваннях.**

В подальшому ми будемо оперувати статистичними методами обробки результатів таких багаторазових вимірювань.

При відповідних умовах ці **статистичні методи дають більш правильну оцінку похибки**, ніж співвідношення (4), отримане тільки на основі здорового глузду.

Правильна статистична обробка має перевагу, що надає об'єктивну оцінку величини похибки і не залежить від думки індивідуального спостерігача.

Разом з тим, оцінка (4) дає простий і реалістичний висновок, отриманий на підставі чотирьох вимірювань (3).

На результати багаторазових вимірювань, такі, як у випадку (3), не завжди можна опиратися під час виявлення похибки. По-перше, ми повинні бути впевнені, що вимірювана величина дійсно є та ж сама величина в кожному випадку.

Припустимо, наприклад, що ми вимірюємо руйнівне зусилля для двох приблизно ідентичних зразків паперу, піддаючи їх руйнуванню (процедурі, що ми не можемо виконати більш ніж один раз для кожного зразка).

У випадку одержання двох різних відповідей ця різниця може вказувати на те, що наші вимірювання виконані з похибкою або що два зразки паперу в дійсності не ідентичні.

Сама по собі різниця між двома відповідями нічого не говорить про надійність наших вимірювань.

Навіть у випадку, коли ми можемо бути впевнені, що вимірюємо щораз ту саму величину, багаторазові вимірювання не завжди вкажуть на похибку.

Наприклад, припустимо, що секундомір, який використовується під час заміру результатів (3), мав хід на 5% швидший правильного. У цьому випадку всі значення часу, одержані з його допомогою, будуть на 5% більші, і ніяка кількість повторювань (з тим же секундоміром) не виявить цього дефекту. Похибки такого роду, які роблять однаковий вплив на всі вимірювання, називаються систематичними похибками.

Ці похибки важко виявити, як ми побачимо пізніше. Для нашого прикладу виходом з положення могла бути перевірка даного секундоміра з більш надійним (еталонним).

У загальному випадку повинно бути ясно, що якщо в когось є підстави сумніватися в правильності показань якого-небудь вимірювального приладу (секундоміра, рулетки, вольтметра), він повинен спробувати перевірити його, з використанням приладу, про який відомо, що його показання більше надійні.

Приклади, які ми обговорювали в данній лекції, показують, що в деяких випадках експериментальні похибки можуть бути легко оцінені.

З іншого боку, є багато вимірювань, для яких оцінити похибки не так легко. Але про все по-порядку в наступних лекціях.

Рекомендована література

1. Корбутяк В.І. Методологія системного підходу та наукових досліджень: Навч. посібник / В.І. Корбутяк. – Рівне: НУВГП, 2010. – 176с.
2. Крушельницька О.В. Методологія та організація наукових досліджень: навч. посібник . К.: Кондор, 2006. 206 с.
3. Клименюк О.В. Методологія та методи наукового дослідження: Навчальний посібник . К.: Міленіум, 2005. 186 с.
4. Шейко В., Кушнарєнко Н. Організація та методика науково-дослідницької діяльності: Підручник. –К.: Знання –Прес, 2003. –295 с.
5. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 272 с.

ЛЕКЦІЯ № 2 " Теорія похибок. Найкраща оцінка. Порівняння вимірюваних значень "

План лекції:

1. Найкраща оцінка $\pm$ похибка;
2. Значущі цифри;
3. Відмінність між результатами вимірювань;
4. Порівняння двох значень: вимірюваного і визнаного (теоретично відомого) ;
5. Порівняння двох вимірюваних значень;
6. Відносні похибки; Значущі цифри у відносних похибках;
7. Множення двох вимірюваних значень.

1. Найкраща оцінка $\pm$ похибка

З попередньої лекції ми дізналися, що коректний спосіб подання результату будь-якого вимірювання полягає в тому, що експериментатор вказує найкращу оцінку вимірюваної величини та інтервал, в якому, як він упевнений, вона знаходиться.

Наприклад, результат вимірювання періодів коливання маятника, який ми обговорювали в попередній лекції, був наданий як

$$\begin{array}{ll} \text{найкраща оцінка часу} & = 2,4 \text{ с,} \\ \text{ймовірний інтервал} & 2,3 - 2,5 \text{ с.} \end{array} \quad (1)$$

У цьому випадку найкраща оцінка 2,4 з лежить в середині оціненого інтервалу ймовірних значень від 2,3 до 2,5 с, аналогічно, як це було у всіх наших прикладах.

Таке положення, мабуть, дуже природне і відноситься майже до всіх вимірювань. Воно дозволяє виразити результати вимірювань у найбільш компактному виді.

Наприклад, вимірювання часу, зафіксоване в (1), зазвичай виражають таким чином:

$$\text{виміряне значення часу} = 2,4 \pm 0,1 \text{ с} \quad (2)$$

Цей вираз адекватний другому рядку в (1).

У загальному випадку результат будь-якого вимірювання величини x наводиться як

$$(\text{виміряне значення } x) = x_{\text{найкращ.}} \pm \Delta x. \quad (3)$$

Це твердження означає, що, по-перше, найкраща оцінка експериментатора для вимірюваної величини є число $x_{\text{найкращ}}$ і, по-друге, він до певної міри впевнений, що ця величина лежить десь між $x_{\text{найкращ}} - \Delta x$ і $x_{\text{найкращ}} + \Delta x$.

Число Δx називається **помилкою або похибкою під час вимірювання x** . Похибку Δx прийнято вважати позитивною величиною, так що $x_{\text{найкращ}} + \Delta x$ є завжди найбільше ймовірне значення вимірюваної величини і $x_{\text{найкращ}} - \Delta x$ - найменше.

Ми навмисно залишили смисл поняття інтервала від $x_{\text{найкращ}} - \Delta x$ до $x_{\text{найкращ}} + \Delta x$ до певної міри невизначеним.

В деяких вимірюваннях його можливо визначити більш точно.

У випадку простого вимірювання, подібного визначенню висоти дверного пройому, ми можемо легко вказати інтервал від $x_{\text{найкращ}} - \Delta x$ до $x_{\text{найкращ}} + \Delta x$, всередині якого, як ми абсолютно впевнені, лежить вимірювана величина.

На жаль, для більшості наукових вимірювань дуже непросто зробити таке ствердження (а саме тому, що ми вимірюємо **величину, природа якої випадкова**).

Між іншим, якщо ми хочемо бути повністю впевненими в тому, що вимірювана величина лежить між $x_{\text{найкращ}} - \Delta x$ і $x_{\text{найкращ}} + \Delta x$, зазвичай необхідно вибрати для Δx таке значення, для якого ймовірність того, що найкраще значення лежить між $x_{\text{найкращ}} - \Delta x$ і $x_{\text{найкращ}} + \Delta x$, буде дорівнювати, наприклад, 70% (В одній із наступних лекцій ми переконаємося, така ймовірність може бути 68%, 95%. а також 99%. І від величини ймовірності залежить ширина інтервалу).

Разом з тим, цього, зазвичай, **неможливо зробити без детального знання статистичних законів, яким підпорядковуються процеси вимірювання**.

Ми повернемося до цього питання пізніше в наших лекціях, а до поки задовольняємося визначенням похибки Δx , згідно з яким ми "до деякої міри" впевнені в тому, що вимірювана величина лежить десь між $x_{\text{найкращ}} - \Delta x$ і $x_{\text{найкращ}} + \Delta x$.

2. Значущі цифри

Потрібно відмітити декілька основних правил запису похибок.

По-перше, оскільки величина Δx служить оцінкою похибки, її, очевидно, неможливо приводити з дуже великою точністю. Якщо ми вимірюємо прискорення сили тяжіння g було б абсурдом мати результат, подібно наступному:

$$(\text{виміряне значення } g) = 9,82 \pm 0,02385 \text{ м/с}^2 \quad (4)$$

Неймовірно, що похибка під час вимірювання могла бути відома до чотирьох значущих цифр.

У випадку високоточних вимірювань інколи приводяться похибки з двома значущими цифрами, але для учбової лабораторії ми можемо сформулювати наступне правило:

Правило приведення похибок	
<i>В учбовій лабораторії експериментальні похибки зазвичай повинні заокруглюватися до першої значущої цифри.</i>	(5)

Таким чином, якщо деякий розрахунок дає для похибки $\Delta g = 0,02385 \text{ м/с}^2$, то це значення повинно бути заокруглено до $\Delta g = 0,02 \text{ м/с}^2$, і висновок (4) потрібно переписати як

$$(\text{виміряне значення } g) = 9,82 \pm 0,02 \text{ м/с}^2. \quad (6)$$

Важливий практичний наслідок з цього правила полягає в тому, що розрахунки похибок можна виконувати усно, не використовуючи калькулятор або навіть олівець і папір.

Є тільки одно важливе виключення із правила (5).

Якщо перша цифра в похибці Δx є одиницею, то, можливо, краще зберегти дві значущі цифри в Δx .

Наприклад, вважатимемо, що деякий розрахунок дав значення похибки $\Delta x = 0,14$. Заокруглити це значення до $\Delta x = 0,1$ - значить на 40% зменшити похибку. Отже, більш правильним було б зберегти дві цифри і привести $\Delta x = 0,14$. Такий же аргумент, ймовірно, можливо було б використати, якщо перша цифра є 2, але, зазвичай, неможливо, якщо вона більша, ніж 2.

Коли похибка під час вимірювання розрахована, необхідно проаналізувати, які цифри в виміряній величині є значущими.

Ствердження типу

$$\text{виміряна швидкість} = 6051,78 \pm 30 \text{ м/с}. \quad (7)$$

очевидно безглузде. Похибка 30 означає, що цифра 5 на третій позиції від початку числа 6051,78 могла бути в дійсності дорівнює 2 або 8. Ясно, що наступні цифри 1,7 і 8 зовсім не мають значення і повинні бути заокруглені.

Таким чином, коректна форма запису (7) є

$$\text{виміряна швидкість} = 6050 \pm 30 \text{ м/с}. \quad (8)$$

Ясно, що загальне правило набуває наступного виду :

Правило приведення результатів
<i>Остання значуща цифра в будь-якому наведеному результаті, зазвичай, повинна бути того ж порядку величини (перебувати в тій же десятковій позиції), що і похибка.</i>

(9)

Наприклад, результат 92,81 з похибкою 0,3 повинен бути заокруглений до
 $92,8 \pm 0,3$.

Якщо ж похибка дорівнює 3, то такий же результат потрібно надати як:

$$93 \pm 3,$$

а якщо похибка дорівнює 30, то як

$$90 \pm 30.$$

Разом з тим, числа, що використовуються під час проведення розрахунків похибки, повинні, як правило, вміщувати на одну значущу цифру більше, ніж це оправдано. Це зменшить неточності, які виникають під час заокруглення чисел. В кінці розрахунків кінцеву відповідь потрібно округлити і відкинути незначущі цифри.

Відмітимо, що похибка в вимірній величині має ту ж розмірність, що в сама виміряна величина.

Таким чином, буде зрозуміло і більш економно записувати одиниці вимірювання (м/с^2 , см^2 і т. д.) після результату похибки, як в виразах (6) і (8).

Подібним чином, якщо вимірне число настільки велике або мале, що воно потребує "наукового запису" (тобто використання форми $3 \cdot 10^3$ замість 3000), то простіше і наглядніше приводити результат і похибку в однаковому вигляді. Наприклад, результат

$$\text{вимірний заряд} = (1,61 \pm 0,05) \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

простіше прочитати і зрозуміти в такій формі запису, ніж у вигляді

$$\text{вимірний заряд} = 1,61 \cdot 10^{-19} \pm 5 \cdot 10^{-21} \text{ Кл}$$

3. Відмінність між результатами вимірювань

Перш ніж повернутися до питання про те, як використовувати похибки в експериментальних звітах, необхідно ввести і визначити декілька важливих термінів.

По-перше, якщо два вимірювання однієї і тієї ж величини вирізняються, то ми будемо говорити, що між ними є відмінність. Чисельно визначимо

відмінність між двома вимірюваннями як їх різниця :

$$\text{відмінність} = \text{різниця між двома виміряними значеннями однієї і тієї ж величини.} \quad (10)$$

Важливо мати на увазі, що **відмінність може бути значимою або незначимою.**

Якщо два студента вимірюють один і той же опір і отримують результати $40 \pm 5 \text{ Ом}$

і

$$42 \pm 8 \text{ Ом},$$

то відмінність в 2 Ом менше, ніж похибки їх результатів, так що два ці вимірювання, зазвичай, узгоджуються. В цьому випадку ми б сказали, що **відмінність є незначимою.**

З іншого боку, якщо два результати були б

$$35 \pm 2 \text{ Ом}$$

і

$$45 \pm 1 \text{ Ом},$$

то виявилось би, що два вимірювання явно розходяться, і **відмінність в 10 Ом є значимою.**

В цьому випадку необхідний ряд ретельних перевірок, для того, щоб визначити, який із результатів є неправильним.

В учбовій лабораторії часто вимірюють величини, які раніше багато разів ретельно вимірювались і для яких дуже точне прийняте значення відоме і надруковане в книжках.

Це прийняте значення, зазвичай, не є абсолютно точним; воно являє собою результат вимірювань і, подібно всім експериментальним результатам, наділене деякою похибкою. Разом з тим, в більшості випадків прийняте значення набагато точніше того, яке студент може отримати сам.

Наприклад, прийняте значення величини швидкості світла c є

$$\begin{array}{l} \text{(прийняте} \\ \text{значення } c) \end{array} = 299\,792\,458 \pm \quad (11)$$

Як очікувалось, цей результат має похибку, але вона виключно мала (зважаючи на стандарти більшості учбових лабораторій).

Насправді є багато експериментів, в яких вимірюють величини, прийняті значення яких відомі, але лише в незначному числі випадків відома справжня (істинна) відповідь.

Фактично істинне значення вимірюваної величини ніколи не може бути точно відоме, і його в дійсності важко визначити.

Разом з тим, інколи корисно розуміти різницю між виміряними значеннями і відповідними істинним значенням, і деякі автори називають цю різницю **істинною похибкою.**

4. ПОРІВНЯННЯ ДВОХ ЗНАЧЕНЬ: ВИМІРЯНОГО І ВИЗНАНОГО (ТЕОРЕТИЧНО ВІДОМОГО)

Немає резону проводити експеримент, якщо із нього потім не будуть зроблені певні висновки.

Переважає більшість експериментів закінчуються висновками у вигляді цифр.

Таким чином, висновки зводяться до утвердження отриманих числових результатів.

Тому важливо зрозуміти факт, що не представляє ніякого інтересу результат, наданий у вигляді **єдиного виміряного значення**.

Навіть твердження, подібні такому, що вимірювання щільності деякого металу дали результат $9,3 \pm 0,2 \text{ г/см}^3$, або що для вимірювання імпульсу теліжки вимірювання дали $0,051 \pm 0,004 \text{ кг*м/с}$, самі по собі не цікаві.

В висновку, який ми маємо отримати, повинні порівнюватися два або більше значень:

- виміряне і прийняте значення (наприклад, величина ДСТУ, ГОСТ);
- результат вимірювання і теоретично обґрунтоване значення ;
- результати декількох вимірювань,

для того, щоб було видно, в якому відношенні одне до одного вони знаходяться у відповідності з деякими фізичними законами.

Тому, під час такого порівняння чисел особливо важлива **теорія похибок**.

В цій лекції ми обговоримо три типові експерименти, для того, щоб продемонструвати, як трактуються похибки в процесі отримання (вироблення) висновків із експерименту.

Ймовірно, що найпростіший тип експерименту - вимірювання величини, прийняте значення якої відоме.

Як ми уже обговорювали, це дещо надуманий, характерний для учбової лабораторії, експеримент. В ньому вимірюють величину, оцінюють експериментальні похибки і, нарешті, порівнюють їх с прийнятим значенням.

Наприклад, експеримент з визначення швидкості звуку в повітрі (за нормальної температури і тиску) міг би привести до висновку, що

$$\text{виміряна швидкість} = 329 \pm 5 \text{ м/с.} \quad (12)$$

порівнюється з виразом

$$\text{прийнята швидкість} = 331 \text{ м/с.} \quad (13)$$

В даному випадку, цей чисельний висновок, з точки зору студента, можна було б, **ймовірно**, прокоментувати таким чином: оскільки прийняте значення швидкості лежить всередині отриманого ним інтервалу швидкостей, то вимірювання було задовільним, на чому можливо було б і зупинитися (прийняте значення 331 лежить в інтервалі 324 – 334).

Отже, резон похибки Δx зводиться до того, що правильне значення x , "ймовірно", лежить між $x_{\text{найкращ.}} - \Delta x$ і $x_{\text{найкращ.}} + \Delta x$.

Зазвичай, можливий також варіант, що правильне значення дещо виходить за межі цього інтервалу.

Розглянемо випадок, коли вимірювання можливо розглядати як задовільне, навіть якщо прийняте значення дещо виходить за межі інтервалу, що утворився в процесі вимірювання. Наприклад, виміряне значення **325±5 м/с** можливо вважати сумісним з прийнятим значенням **331 м/с** (прийняте значення 331 дещо виходить за межі інтервалу, що утворився 320 – 330).

З іншого боку, якщо **прийняте значення виходить далеко за межі виміряного інтервалу (тобто, різниця набагато більша, ніж подвійна похибка), то є причина вважати , що десь допущена похибка.**

Таким чином, не зовсім старанний студент, який отримає

$$\text{виміряна швидкість} = 345 \pm 2 \text{ м/с.} \quad (14)$$

в порівнянні з

$$\text{прийнята швидкість} = 331 \text{ м/с.} \quad (15)$$

повинен перевірити свої вимірювання і розрахунки, для того, щоб відшукати допущені промахи.

На жаль, дуже складно прослідкувати його промахи, оскільки існує безліч можливих причин її утворення.

Він міг допустити похибку у вимірюваннях або розрахунках, які призвели до результату 345 м/с. Він міг неправильно оцінити похибку свого експерименту. (Результат 345 ± 10 м/с був би, наприклад, повністю прийнятним).

Він міг порівнювати свої вимірювання з помилково прийнятим значенням. Наприклад, прийняте значення 331 м/с є швидкість звуку за нормальних температури і тиску. Так як нормальна температура дорівнює 0°C , то повністю ймовірно, що виміряна швидкість в (3) отримана не за нормальної температури. Насправді, якщо вимірювання було виконане за 20°C (тобто за звичайної кімнатної температури), то правильне прийняте значення для швидкості звуку складає 343 м/с і результат вимірювання виявиться повністю прийнятним.

Нарешті (і, можливо, найбільш ймовірно), - відмінність між отриманими (3) і (4), може вказувати на деяке невиявлене джерело систематичної похибки (як у випадку секундоміра, хід якого швидший за нормальний, що обговорювалось в попередній лекції).

Для виявлення таких систематичних похибок (які змінюють результат в одному напрямку) потрібна ретельна перевірка та калібровка всіх приладів та детальне вивчення всіх процесів.

5. Порівняння двох вимірених значень

В багатьох експериментах доводиться вимірювати два значення, які, у відповідності з певною теорією, повинні бути рівними.

Наприклад, у відповідності із **законом збереження імпульсу повний імпульс ізольованої системи є величиною постійною**.

Для того, щоб це перевірити, ми могли б виконати серію експериментів із двома візками, які можуть зіштовхуватися під час руху без тертя по дошці.

Ми можемо виміряти повний імпульс двох візків перед зіткненням (p) і після їх зіткнення (p'), а потім перевірити, чи виконується рівність $p = p'$ у межах експериментальних похибок.

Для однієї пари вимірювань наші результати могли б мати вигляд

$$\text{початковий імпульс } p = 1,49 \pm 0,04 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$$

і

$$\text{кінцевий імпульс } p' = 1,56 \pm 0,06 \text{ кг}\cdot\text{м/с.}$$

У цьому випадку інтервал, у якому, можливо, лежить p (від 1,45 до 1,53), перекривається з інтервалом, у якому, можливо, лежить p' (від 1,50 до 1,62). Таким чином, ці вимірювання узгоджуються із законом збереження імпульсу.

Якби, з іншого боку, виявилось, що два ймовірних інтервали навіть не близькі до тому, щоб перекриватися, то вимірювання не узгоджувалися б із законом збереження імпульсу і ми змушені були б шукати, які помилки допущені в наших вимірюваннях або розрахунках, тобто визначати можливі систематичні похибки та перевірити можливість того, що якісь зовнішні сили (такі, як сила тяжіння або тертя) змінюють імпульс системи.

Вважатимемо, що ми повторюємо подібні пари вимірювань декілька разів. Як краще подати наші результати?

По-перше, завжди зручніше подати послідовність подібних вимірювань у вигляді таблиці, а не у вигляді окремих результатів. По-друге, наша похибка часто дуже мало змінюється від одного вимірювання до іншого. Наприклад, ми могли б прийняти, що похибка у всіх вимірюваннях початкового імпульсу $p \in \Delta p \approx 0,04$ кг*м/с і що похибка імпульсу $p' \in \Delta p' \approx 0,06$ кг*м/с.

У цьому випадку зручним є спосіб подати наші вимірювання у вигляді табл. 1.

Таблиця 1. Виміряні імпульси (в кг*м/с)

Начальний імпульс $p (\pm 0,04)$	Кінцевий імпульс $p' (\pm 0,06)$
1,49	1,56
2,10	2,12
1,16	1,05
і т.д	і т.д

Для кожної пари вимірювань ймовірний інтервал значень p перекривається (або майже перекривається) з інтервалом значень p' . Якщо це буде залишатися вірним для всіх вимірювань, те ми могли б вважати, що наші результати узгоджуються із законом збереження імпульсу.

Трохи подумавши, ми могли б надати наші результати у вигляді, а саме: **у відповідності із законом збереження імпульсу, різниця $p - p'$ завжди повинна дорівнювати нулю.**

Якби ми добавили в нашу таблицю графу із значеннями $p - p'$, то в ній були б величини, які майже не вирізняються від нуля.

Єдина трудність тут в тому, що ми повинні знати, як розрахувати похибку для різниці $p - p'$.

Але це можливо зробити. Вважатимемо, що ми провели вимірювання і отримали:

$$(\text{виміряне значення } p) = p_{\text{найкращ.}} \pm \Delta p,$$

$$\text{або у вигляді інтервала: } (p_{\text{найкращ.}} + \Delta p) - (p_{\text{найкращ.}} - \Delta p) \text{ та}$$

$$(\text{виміряне значення } p') = p'_{\text{найкращ.}} \pm \Delta p'$$

або у вигляді інтервала: $(p'_{\text{найкращ.}} + \Delta p') - (p'_{\text{найкращ.}} - \Delta p')$.

Числа $p_{\text{найкращ.}}$ і $p'_{\text{найкращ.}}$ - наші найкращі оцінки для p і p' .

Таким чином, найкраща оцінка для різниці $(p - p')$ є $(p_{\text{найкращ.}} - p'_{\text{найкращ.}})$. Для того, щоб знайти похибку в $(p - p')$ ми повинні визначити найбільше і найменше ймовірні значення величини $(p - p')$.

Найбільше значення величини $(p - p')$ отримали б тоді, коли величина p мала б найбільше ймовірне значення $p_{\text{найкращ.}} + \Delta p$, а в цей час p' мала б найменше ймовірне значення $p'_{\text{найкращ.}} - \Delta p'$.

$$\begin{aligned} \text{Таким чином, найбільше ймовірне значення } (p - p') \text{ є} \\ \text{найбільше ймовірне значення} &= (p_{\text{найкращ.}} + \Delta p) - (p'_{\text{найкращ.}} - \Delta p') = \quad (16) \\ &= p_{\text{найкращ.}} + \Delta p - p'_{\text{найкращ.}} + \Delta p' = (p_{\text{найкращ.}} - p'_{\text{найкращ.}}) + (\Delta p + \Delta p'). \end{aligned}$$

Аналогічно найменше ймовірне значення отримали б тоді, коли величина p була б мінімальна $(p_{\text{найкращ.}} - \Delta p)$, а p' - максимальна $p'_{\text{найкращ.}} + \Delta p'$.

$$\begin{aligned} \text{найменше ймовірне значення} &= (p_{\text{найкращ.}} - \Delta p) - (p'_{\text{найкращ.}} + \Delta p') = \quad (17) \\ &= p_{\text{найкращ.}} - \Delta p - p'_{\text{найкращ.}} - \Delta p' = (p_{\text{найкращ.}} - p'_{\text{найкращ.}}) - (\Delta p + \Delta p'). \end{aligned}$$

Порівнюючи (5) і (6), ми бачимо, що похибка в різниці $(p - p')$ є сума $\Delta p + \Delta p'$ початкових похибок. Наприклад, якщо

$$p = 1,49 \pm 0,04 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$$

і

$$p' = 1,56 \pm 0,06 \text{ кг} \cdot \text{м/с},$$

то

$$p - p' = -0,07 \pm 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Тепер ми можемо додати ще одну графу для $p - p'$ в табл. 1 і отримати табл. 2.

Тепер ми маємо можливість з першого погляду визначити, чи узгоджуються наші результати із законом збереження імпульсу, перевіряючи наявність числа, близького до нуля в останній графі таблиці (тобто, менше воно, чи порівнянне з похибкою 0,1).

Таблиця 2. Виміряні імпульси (в $\text{кг} \cdot \text{м/с}$)

Начальний імпульс $p (\pm 0,04)$	Кінцевий імпульс $p' (\pm 0,06)$	Різниця імпульсів $p - p' (\pm 0,1)$
1,49	1,56	-0,07
2,10	2,12	-0,02
1,16	1,05	0,11
і т.д	і т.д	і т.д

Іншим способом одержання того ж ефекту було б табулювання відношення p'/p , які повинні бути узгоджуватися з величиною $p'/p=1$. (У цьому випадку ми були б змушені розраховувати похибку в p'/p . Але цю питання ми розглянемо пізніше).

Наш висновок: похибки в $p - p'$ ймовірно застосувати до різниці будь-яких двох вимірних значень.

Таким чином, ми установили наступне загальне правило:

Правило похибки різниці результатів вимірювань
Якщо величини x і y виміряні з похибками Δx і Δy і якщо виміряні значення x і y використовуються для розрахунку різниці $q = x - y$, то похибка в q є сума похибок в x і y :
$\Delta q \approx \Delta x + \Delta y$

(18)

Ми використали знак наближеної рівності ($\approx$) для того, щоб підкреслити два моменти.

По-перше, у нас до цього часу немає точного визначення природи похибок, з якими ми маємо справу, так що було б абсурдом стверджувати, що Δq точно дорівнює $\Delta x + \Delta y$. А, по-друге, надалі ми побачимо, що похибка Δq часто дещо менша, ніж визначається в (18).

Найкраща оцінка - це так звана "квадратична сума Δx і Δy " (як буде визначено пізніше).

Таким чином, знак $\approx$ в (18) використаний як нагадування про те, що ми пізніше замінимо (18) кращою оцінкою.

Результат (18) - **перший в серії правил розрахунку похибок у випадку непрямих вимірювань.**

6. Відносні похибки

Похибка Δx під час вимірювання

$$(\text{виміряне значення } x) = x_{\text{найкращ.}} \pm \Delta x.$$

показує надійність або в деякій мірі **точність вимірювання.**

Разом з тим, похибка сама по собі не розкриває всієї картини процесу вимірювання. Так, похибка в 1 см під час вимірювання відстані 1 км означала б надзвичайно точне вимірювання. В той час як похибка в 1 см для 3 см означала б лише грубу оцінку.

Очевидно, що якість вимірювання характеризується не тільки самою похибкою Δx , але також і відношенням величини Δx до $x_{\text{найкращ.}}$ і ця обставина заставляє нас розглядати **відносну похибку**, яку ми будемо позначати δ_x .

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{|x_{\text{найкращ}}|} \quad (19)$$

(Відносна похибка також зветься **точністю**.)

В цьому визначенні символ $|x_{\text{найкращ}}|$ означає абсолютну величину $x_{\text{найкращ}}$.

Для того, щоб уникнути непорозумінь з відносною похибкою, саму похибку Δx інколи називають **абсолютною похибкою**.

Як правило, в більшості серйозних вимірювань похибка Δx набагато менше вимірюваної величини $x_{\text{найкращ}}$.

Оскільки при цьому відносна похибка $\delta_x = \frac{\Delta x}{|x_{\text{найкращ}}|}$ представляє собою зазвичай мале число, часто зручно помножити її на **100 і** надавати як похибку у відсотках.

Наприклад, результат вимірювання

$$\text{довжина } l = 50 \pm 1 \text{ см} \quad (20)$$

має відносну похибку

$$\delta_l = \frac{\Delta l}{|l_{\text{найкращ}}|} = \frac{1}{|50|} = 0,02$$

і похибку (надану у відсотках) - 2%.

Таким чином, результат (2) міг бути наданий у вигляді

$$\text{довжина } l = 50 \text{ см} \pm 2\%. \quad (21)$$

Потрібно звернути увагу на те, що, в той час як абсолютна похибка Δl вимірюється в тих же одиницях, що і l , то відносна похибка $\delta_l = \frac{\Delta l}{|l_{\text{найкращ}}|}$ є

безрозмірною величиною.

Врахування цієї різниці допоможе нам уникнути частих помилок, коли плутають абсолютну похибку з відносною.

Відносна похибка - наближено характеризує якість вимірювань незалежно від значення величини, що вимірюється.

Відносна похибка в 10% (або біля того) — це зазвичай характеристика досить грубих вимірювань. (Грубе вимірювання 10-ти см могло б мати похибку в 1 см; а грубе вимірювання 10-ти км могло б мати похибку в 1 км.)

Відносна похибка в 1 або 2% характеризує уже досить точні вимірювання, і це, мабуть, краще, на що можна сподіватися в багатьох експериментах, які виконуються в учбових лабораторіях.

Відносних похибок, значно менших 1%, зазвичай важко добитися, і вони рідко досягаються в учбових лабораторіях. Ці оцінки, зазвичай, досить умовні; за деяких досить простих вимірювань без особливих зусиль можливо отримати відносну похибку в 0,1%. З якісною рулеткою відстань в 3 м легко виміряти с похибкою в 0,3 см, або приблизно 0,1%, з добрим годинником відрізок часу в одну годину легко виміряти с похибкою меншою, ніж секунда, або 0,03%.

З іншого боку, для багатьох величин, які дуже важко виміряти, похибка в 10% розглядалася б як експериментальний тріумф.

Таким чином, велика відносна похибка не означає, що вимірювання в науковому плані даремні.

Багато важливих вимірювань в історії фізики та хімії мали експериментальні похибці в 10% або і більші.

В учбовій лабораторії з обладнанням, яке дозволяє отримувати результати з мінімальною похибкою порядку декількох відсотків, можливо вивчати багато цікавих закономірностей.

ЗНАЧУЩІ ЦИФРИ У ВІДНОСНИХ ПОХИБКАХ

Концепція відносної похибки тісно пов'язана із звичним поняттям значущих цифр.

Дійсно, **число значущих цифр в чисельному виразі будь-якої величини приблизно вказує на відносну похибку цього значення.**

Наприклад, розглянемо два числа

$$510 \text{ і } 0,51,$$

точність яких до двох значущих цифр достовірна. Оскільки число 510 (з двома значущими цифрами) означає

$$510 \pm 5, \text{ або } 510 \pm 1\%,$$

і 0,51 означає

$$0,51 \pm 0,005, \text{ або } 0,51 \pm 1\%,$$

то ми бачимо, що обидва числа визначені з точністю до 1 %.

Іншими словами, **твердження, що числа 510 і 0,51 мають дві значущі цифри, еквівалентне тому, що вона визначені з точністю до 1 %.**

Аналогічно, число 510 з трьома значущими цифрами характеризувалося б відносною похибкою 0,1% і т. д.

На жаль, це корисна відповідність є лише наближеною. Число 110, надане з двома значущими цифрами, означає

$$110 \pm 5, \text{ або } 110 \pm 5\%,$$

в той час як число 910 (також з двома значущими цифрами) означає

$$910 \pm 5, \text{ або } 910 \pm 0,5\%.$$

Ми бачимо, що відносна похибка, що пов'язана с двома значущими цифрами, змінюється від 0,5 до 5% в залежності від першої цифри числа, яке ми розглядаємо. Результат таких роздумів викладений в табл. 1.

Таблиця 1- Наближена відповідність між значущими цифрами і відносною похибкою

Число значущих цифр	Відповідна відносна похибка	
	знаходиться між	або дуже наближено відповідає
1	5 і 50%	10%
2	0,5 і 5%	1%
3	0,05 і 0,5 %	0,1%

7. МНОЖЕННЯ ДВОХ ВИМІРЯНИХ ЗНАЧЕНЬ

Мабуть, найбільш важлива особливість в розумінні **відносної похибки** проявляється за перемноження вимірених значень одне на одне.

Наприклад, щоб знати імпульс тіла, ми могли б виміряти його масу m і швидкість v_t , а потім перемножити їх і отримати імпульс $p = mv$.

Звичайно, що обидві величини m і v_t наділені похибками, які ми повинні будемо оцінити.

Потім виникне задача віднайти похибку в p , яка є наслідком відомих похибок в m і v_t .

По-перше, для зручності запишемо число в стандартному вигляді,

$$(\text{виміряне значення } x) = x_{\text{найкращ}} \pm \Delta x$$

а потім, використовуючи поняття відносної похибки, запишемо спочатку:

$$\begin{aligned} (\text{виміряне значення } x) &= x_{\text{найкращ}} \pm \frac{|x_{\text{найкращ}}| * \Delta x}{|x_{\text{найкращ}}|} \\ (\text{виміряне значення } x) &= x_{\text{найкращ}} \left(1 \pm \frac{\Delta x}{|x_{\text{найкращ}}|} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Наприклад, якщо відносна похибка складає 3% то, виходячи з (4), маємо

$$(\text{виміряне значення } x) = x_{\text{найкращ}} \left(1 \pm \frac{3}{100} \right)$$

тобто, похибка в 3% означає, що x , ймовірно, лежить десь між значеннями $x_{\text{найкращ}}$, помноженим на 0,97, і $x_{\text{найкращ}}$ помноженим на 1,03, тобто

$$(0,97) * x_{\text{найкращ}} \leq x \leq (1,03) * x_{\text{найкращ}}.$$

Ми бачимо, що це корисна форма подання чисел, які ми збираємося перемножати.

Повернемося тепер до нашого завдання розрахунку $p = mv$, коли m і v були вимірювані як

$$(\text{виміряне значення } m) = m_{\text{найкращ}} \left(1 \pm \frac{\Delta m}{|m_{\text{найкращ}}|} \right) \quad (23)$$

і

$$(\text{виміряне значення } v) = v_{\text{найкращ}} \left(1 \pm \frac{\Delta v}{|v_{\text{найкращ}}|} \right) \quad (24)$$

Оскільки $m_{\text{найкращ}}$ і $v_{\text{найкращ}}$ - наші найкращі оцінки для m і v то найкраща оцінка для $p = mv$ є

$$p_{\text{найкращ}} = (\text{найкраща оцінка для } p) = m_{\text{найкращ}} * v_{\text{найкращ}}.$$

Максимальні (найбільші) ймовірні значення m і v надаються виразами (5) і (6) зі знаком плюс.

Таким чином, максимальне ймовірне значення для $p = mv$ є

$$(p_{\text{максимальне значення}}) = m_{\text{найкращ.}} \cdot v_{\text{найкращ.}} \cdot \left(1 + \frac{\Delta m}{|m_{\text{найкращ.}}|}\right) \cdot \left(1 + \frac{\Delta v}{|v_{\text{найкращ.}}|}\right) \quad (25)$$

Найменше ймовірне значення для p надається аналогічним виразом з двома знаками мінус.

Тепер результат добутку дужок в (25) може бути наданий у вигляді

$$\left(1 + \frac{\Delta m}{|m_{\text{найкращ.}}|}\right) \cdot \left(1 + \frac{\Delta v}{|v_{\text{найкращ.}}|}\right) = 1 + \frac{\Delta m}{|m_{\text{найкращ.}}|} + \frac{\Delta v}{|v_{\text{найкращ.}}|} + \frac{\Delta m}{|m_{\text{найкращ.}}|} \cdot \frac{\Delta v}{|v_{\text{найкращ.}}|} \quad (26)$$

Оскільки дві відносні похибки $\frac{\Delta m}{|m_{\text{найкращ.}}|}$ і $\frac{\Delta v}{|v_{\text{найкращ.}}|}$ - малі числа (можливо, порядку декількох відсотків), то їх добуток дуже малий. Таким чином, останнім членом в (8) можливо знехтувати.

Повертаючись до (25), ми отримаємо

$$(p_{\text{максимальне значення}}) = m_{\text{найкращ.}} \cdot v_{\text{найкращ.}} \cdot \left(1 + \frac{\Delta m}{|m_{\text{найкращ.}}|} + \frac{\Delta v}{|v_{\text{найкращ.}}|}\right)$$

Найменше ймовірне значення надається аналогічним виразом з двома знаками мінус.

Наші вимірювання m і v призводять, таким чином, до значення $p = mv$, яке визначається виразом

$$(p_{\text{значення}}) = m_{\text{найкращ.}} \cdot v_{\text{найкращ.}} \cdot \left(1 \pm \left[\frac{\Delta m}{|m_{\text{найкращ.}}|} + \frac{\Delta v}{|v_{\text{найкращ.}}|}\right]\right)$$

Порівнюючи цей вираз з загальною формою запису,

$$(p_{\text{значення } p_{\text{найкращ.}}}) = p_{\text{найкращ.}} \cdot \left(1 \pm \frac{\Delta p}{|p_{\text{найкращ.}}|}\right)$$

ми бачимо, що найкраща оцінка для $p \in p_{\text{найкращ.}} = m_{\text{найкращ.}} \cdot v_{\text{найкращ.}}$ (як нам уже відоме) і що відносна похибка p дорівнює сумі відносних похибок m і v .

$$\frac{\Delta p}{|p_{\text{найкращ.}}|} = \frac{\Delta m}{|m_{\text{найкращ.}}|} + \frac{\Delta v}{|v_{\text{найкращ.}}|} \quad \text{або} \quad \delta_p = \delta_m + \delta_v.$$

Якщо, наприклад, у нас були наступні виміряні значення для m і v :

$$m = 0,53 \pm 0,01 \text{ кг}$$

і

$$v = 9,1 \pm 0,3 \text{ м/с,}$$

то найкраща оцінка для $p = mv$ дорівнює

$$p_{\text{найкращ.}} = m_{\text{найкращ.}} \cdot v_{\text{найкращ.}} = (0,53) \cdot (9,1) = 4,82 \text{ кг} \cdot \text{м/с.},$$

Для того, щоб розрахувати похибку в p , ми спочатку обчислимо відносні

похибки

$$\delta_m = \frac{0,01}{0,53} = 0,02 = 2\%$$

і

$$\delta_v = \frac{0,3}{9,1} = 0,03 = 3\%.$$

Відносна похибка в p є сума $\delta_p = 2\% + 3\% = 5\%$.

Якщо ми захочемо узнати абсолютну похибку в p , необхідно перемножити отримане число на $p_{\text{найкращ}}$:

$$\Delta p = \delta_p * p_{\text{найкращ}} = 0,05 * 4,82 = 0,241.$$

Потім, використовуючи правила заокруглення результатів Δp і $p_{\text{найкращ}}$, одержуємо остаточну відповідь: (значення p) = $4,82 \pm 0,24$ кг•м/с.

(пам'ятаємо, що відкинути 4 після 2 ми не можемо: втрачається 40% точності).

Розглянутий приклад можна застосувати до будь-якого здобутку двох вимірних величин.

Таким чином, ми отримали друге загальне правило для непрямих вимірювань.

Якщо ми вимірюємо дві величини і шукаємо їх здобуток, то похибки в двох вихідних величинах «поширюються» і утворюють похибку в їх здобутку.

Ця похибка надається наступним правилом:

Правило розрахунку похибки здобутку результатів вимірювань	
Якщо величини x і y виміряні з малими відносними похибками $\Delta x/x_{\text{найкращ}}$ і $\Delta y/y_{\text{найкращ}}$ і якщо виміряні значення x і y використовуються для розрахунку результату множення $q = x * y$, то відносна похибка q дорівнює сумі відносних похибок x і y:	(27)
$\delta_q \approx \delta_x + \delta_y$	

Ми використали знак приблизної рівності в (27), оскільки, як і у випадку правила обчислення похибки для різниці, ми пізніше замінимо (9) більш точним правилом.

Потрібно підкреслити також дві інші особливості цього правила. По-перше, під час виведення виразу (27) передбачалося, що відносні похибки x і y повинні бути досить малими, для того, щоб їх здобутком можливо було знехтувати.

На практиці ця умова майже завжди виконується, так що ми завжди будемо так припускати. Проте, потрібно пам'ятати, що якщо відносні похибки

ненабагато менші одиниці, то правило (27) не можна застосовувати.

По-друге, навіть якщо x і y мають різну розмірність, то в рівняння (27) входять безрозмірні величини, оскільки все відносні похибки безрозмірні.

Під час виконання лабораторних робіт ми постійно перемножуємо числа, тому правило (27) для знаходження похибки в добутку відіграє важливу роль в **теорії похибок**.

Таким чином, головна мета цієї лекції було підкреслити, що похибку любого добутку $Q = x * y$ найбільш просто можна виразити через відносні похибки виразом типу (9).

Рекомендована література

1. Корбутяк В.І. Методологія системного підходу та наукових досліджень: Навч. посібник / В.І. Корбутяк. – Рівне: НУВГП, 2010. – 176с.
2. Крушельницька О.В. Методологія та організація наукових досліджень: навч. посібник . К.: Кондор, 2006. 206 с.
3. Клименюк О.В. Методологія та методи наукового дослідження: Навчальний посібник . К.: Міленіум, 2005. 186 с.
4. Шейко В., Кушнарєнко Н. Організація та методика науково-дослідницької діяльності: Підручник. –К.: Знання –Прес, 2003. –295 с.
5. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 272 с.

ЛЕКЦІЯ № 3 " Похибки в непрямих вимірюваннях. Статистичний аналіз багатократних вимірювань з випадковими похибками "

План лекції:

1. Похибки суми та різниці величин;
2. Похибки під час множення та ділення вимірюваних величин;
 - 2.1 Похибки під час множення вимірюваної величини на точне число;
 - 2.2 Похибки за віднесення вимірюваної величини до ступеня;
3. Випадкові та систематичні похибки;
4. Середнє значення і стандартне відхилення;
5. Стандартне відхилення – як похибка одиничного виміру;
6. Стандартне відхилення середнього;
7. Додатково про систематичні похибки для учбових лабораторій.

Більшість фізичних величин, зазвичай, неможливо виміряти безпосередньо (прямо), тому їх визначення проводиться в два етапи.

Спочатку вимірюють одну або більше величин із множини $x, y, \dots$, які можуть бути безпосередньо виміряні з метою обчислення величини, яка нас цікавить.

На другому етапі, використовуючи виміряні значення $x, y, \dots$, обчислюють саму шукану величину.

Наприклад, щоб знайти площу прямокутника, зазвичай, вимірюють його довжину l і висоту h і потім розраховують його площу A за формулою $A = l \cdot h$. Аналогічно найбільш очевидний спосіб визначення швидкості v деякого тіла полягає в тому, щоб виміряти шлях S , пройдений тілом, і витрачений на це час t , а потім обчислити v за формулою $v = S/t$.

Якщо вимірювання включає два етапи, то, відповідно, оцінка похибок також включає їх.

Спочатку потрібно оцінити похибки у величинах, які вимірюються безпосередньо, а потім визначити, як ці похибки поширюються в розрахунках і призводять до похибки в кінцевому результаті.

Це "поширення похибок", або **розрахунок похибок у випадку непрямих вимірювань** складає головну тему двох наших наступних лекцій.

Ми визначимось, що майже всі проблеми розрахунку похибок у непрямих вимірюваннях можуть бути вирішені за допомогою трьох простих правил.

Ми сформулюємо також єдине, більше складне, правило, яке придатне для всіх випадків і з якого можуть бути отримані три більше прості правила.

1. ПОХИБКИ СУМИ ТА РІЗНИЦІ ВЕЛИЧИН

У двох наступних лекціях ми будемо припускати, що нами проведені вимірювання однієї або більше величин $x, y, \dots$ з відповідними похибками $\Delta x, \Delta y, \dots$

В подальшому ми хочемо у відповідності з виміряними значеннями $x, y, \dots$ обчислити величину q , яка нас в дійсності цікавить.

Щодо розрахунку величини q то, зазвичай, він виконується безпосередньо. Проблема, яка нас цікавить, полягає в тому, яким чином похибки $\Delta x, \Delta y, \dots$, "поширюючись" через розрахунки, призводять до похибки Δq непрямих вимірювань остаточної величини q .

Один із самих простих випадків – це сума двох вимірених значень.

В одній з попередніх лекцій ми (під час розгляду питання про порівняння обмірюваних величин) обговорювали, що відбувається, коли вимірюються дві величини x і y , як наслідок, обчислюється їхня різниця $x - y$.

Щоб оцінити похибки для суми (за аналогією як і для різниці), ми повинні тільки визначити їхні найбільші та найменші ймовірні значення.

Найбільше та найменше ймовірні значення x дорівнюють $= x_{\text{найкращ.}} \pm \Delta x$, а аналогічні величини для y дорівнюють $= y_{\text{найкращ.}} \pm \Delta y$.

Отже, найбільше ймовірне значення $x + y$ є

$$(x_{\text{найкращ.}} + y_{\text{найкращ.}}) + (\Delta x + \Delta y)$$

і найменше ймовірне значення

$$(x_{\text{найкращ.}} + y_{\text{найкращ.}}) - (\Delta x + \Delta y)$$

Таким чином, істинна оцінка для $q = x + y$ є

$$q_{\text{найкращ.}} = (x_{\text{найкращ.}} + y_{\text{найкращ.}}) \pm (\Delta x + \Delta y)$$

Отже, похибка Δq :

$$\Delta q = \Delta x + \Delta y \quad (1)$$

Аналогічна формула для похибки для різниці $x - y$ була отримана нами раніше.

Таким чином, похибка як для суми $x + y$ так і для різниці $x - y$ являє собою суму $\Delta x + \Delta y$ похибок в x і y .

У випадку декількох чисел $x, \dots, w$, які треба складати або віднімати, призводять до наступного правила:

Правило похибки суми або різниці результатів вимірювань	
Якщо декілька величин $x, \dots, w$, виміряні з похибками $\Delta x, \dots, \Delta w$ і використовуються для розрахунку $q = x + \dots + z - (u + \dots + w)$, то похибка в розрахованій величині q є сума	(2)
$\Delta q \approx \Delta x + \dots + \Delta z + \dots + \Delta w$ всіх вихідних похибок.	

Інакше кажучи, коли складають або віднімають будь-яке число обмірюваних величин, то похибки цих величин завжди складаються.

Як і колись, ми використовуємо знак $\approx$, щоб підкреслити, що незабаром ми поліпшимо це правило.

Приклад (детальніше розглядається в практ.заняттях №4)

В якості простого прикладу застосування правила (2) припустимо, що експериментатор змішує рідини із двох бутлів, попередньо вимірявши окремо маси цих наповнених і потім порожніх бутлів і одержавши в результаті:

M_1 - маса першого бутля і його вмісту = 540 ± 10 г;

m_1 = маса першого пустого бутля = 72 ± 1 г;

M_2 = маса другого бутля і його вмісту = 940 ± 20 г;

m_2 = маса другого пустого бутля = 97 ± 1 г.

Потім він розраховує повну масу рідини як

$$M = M_1 - m_1 + M_2 - m_2 = (540 - 72 + 940 - 97) \text{ г} = 1311 \text{ г}.$$

У відповідності з правилом (2) похибка у його результаті є сума всіх чотирьох похибок:

$$\Delta M \approx \Delta M_1 + \Delta m_1 + \Delta M_2 + \Delta m_2 = (10 + 1 + 20 + 1) \text{ г} = 32 \text{ г}.$$

Таким чином, його кінцевий результат (належним чином заокруглений) має вигляд

$$\text{повна маса рідини} = 1310 \pm 30 \text{ г}.$$

Необхідно примітити, що істотно менші похибки в масах порожніх бутлів вносять незначну добавку в кінцеву похибку.

Це дуже важливий ефект, який ми будемо обговорювати пізніше. З часом Ви, як студенти, повинні навчитися заздалегідь виявляти ті похибки, які дуже малі і тому можуть бути виключені з розгляду. Часто це може дуже істотно спростити розрахунок похибок.

2. Похибки за множення та ділення виміряних величин

В одній із попередніх лекцій ми розглянули похибки в добутку $q = x \cdot y$ двох виміряних величин.

Ми прийшли до висновку, що за умови малих відносних похибок вихідних величин **відносна похибка в $q = x \cdot y$ є сума відносних похибок в x і y** .

Зараз ми розглянемо подібний випадок частки від ділення $q = x/y$.

Як ми побачимо згодом, похибка частки виражається тим же самим правилом, що і для добутку, тобто **відносна похибка в $q = x/y$ дорівнює сумі відносних похибок в x і y** .

Оскільки похибки в добутках і частках найкраще виражаються в термінах відносних похибок, то для зручності в подальшому ввести більш коротке позначення.

Нагадаємо, що якщо ми вимірюємо деяку величину x як

$$(\text{виміряне значення } x) = x_{\text{найкращ.}} \pm \Delta x. \quad (3)$$

тобто звичайним образом, то відносна похибка в x визначається як

$$\text{відносна похибка в } x = \delta_x = \frac{\Delta x}{|x_{\text{найкращ.}}|}.$$

(Абсолютне значення в знаменнику завжди забезпечує позитивність відносної погрішності, навіть коли величина $x_{\text{найкращ.}}$ негативна.)

Оскільки вираз $\frac{\Delta x}{x_{\text{найкращ.}}}$ незручно писати та читати, то з цього моменту ми будемо використовувати його скорочене написання, в якому опустимо індекс "найкращ.":

$$\text{відносна похибка в } x = \delta_x = \Delta x / x.$$

Результат вимірювань будь-якої величини x може бути виражений через його відносну похибку δ_x як

$$(\text{значення } x) = x_{\text{найкращ.}} * (1 \pm \delta_x).$$

Таким чином, значення $q = x/y$ може бути переписане як

$$(\text{значення } q) = \frac{x_{\text{найкращ.}}}{y_{\text{найкращ.}}} * \frac{1 \pm \delta_x}{1 \pm \delta_y}.$$

Наше завдання тепер - віднайти екстремальні ймовірні значення другого множника праворуч.

Цей множник максимальний, наприклад, коли чисельник дорівнює його **найбільшому значенню**, $1 + \delta_x$, а знаменник дорівнює його **найменшому значенню** $1 - \delta_y$.

Таким чином, **найбільше ймовірне значення** для $q = x/y$ дорівнює

$$(\text{найбільше значення } q) = \frac{x_{\text{найкращ.}}}{y_{\text{найкращ.}}} * \frac{1 + \delta_x}{1 - \delta_y}. \quad (4)$$

Останній співмножник у виразі (4) має форму $(1 + a)/(1 - b)$, де числа a і b зазвичай малі (тобто багато менші за одиницю).

Цю форму можна спростити за допомогою двох наближень. По-перше, оскільки число b мале, то біноміальна теорема дає

$$\frac{1}{(1 - b)} \approx 1 + b \quad (5)$$

Отже,

$$\frac{1 + a}{1 - b} = (1 + a) * \frac{1}{1 - b} \approx (1 + a) * (1 + b) = 1 + a + b + ab \approx 1 + a + b,$$

де в останньому виразі ми знехтували добутком двох малих величин **ab** . Повертаючись до (5) і використовуючи принцип такого наближення, ми отримуємо для **найбільшого ймовірного значення** $q = x/y$

$$(\text{найбільше значення } q) = \frac{x_{\text{найкращ.}}}{y_{\text{найкращ.}}} * (1 + \delta_x + \delta_y).$$

Аналогічно, **найменше ймовірне значення** надається подібним же виразом із двома знаками мінус.

Поєднуючи ці результати, находимо:

$$(\text{значення } q) = \frac{x_{\text{найкращ.}}}{y_{\text{найкращ.}}} * (1 \pm (\delta x + \delta y)).$$

Порівнюючи цей вираз зі стандартним записом

$$(\text{значення } q) = q_{\text{найкращ.}} (1 \pm \delta q).$$

ми бачимо, що найкраще значення q дорівнює $q_{\text{найкращ.}} = x_{\text{найкращ.}} / y_{\text{найкращ.}}$, як ми могли б очікувати, і що відносна похибка є

$$\delta q = \delta x + \delta y. \quad (6)$$

Ми приходимо до висновку, що під час ділення або множення двох вимірюваних значень x і y відносна похибка результату дорівнює сумі відносних похибок x і y , як в (6).

Якщо тепер множити або ділити цілий ряд чисел, то повторне застосування цього результату приведе нас до наступного загального правила:

Похибки добутку і ділення результатів вимірювань
Якщо декілька величин $x, \dots, w$ виміряні з малими похибками $\Delta x, \dots, \Delta w$ і якщо виміряні значення використовуються для розрахунку $q = \frac{x * \dots * z}{u * \dots * w}$ то відносна похибка розрахованої величини q дорівнює сумі : $\delta q \approx \delta_x + \dots + \delta_z + \delta_u + \dots + \delta_w$

(7)

Отже, під час множення або ділені величин відносні похибки складаються.

Приклад

Під час зйомки на місцевості іноді доводиться визначати недоступну безпосередньому виміру довжину l (таку, як висота великого дерева) за допомогою вимірів трьох інших довжин l_1, l_2, l_3 , які дають

$$l = \frac{l_1 * l_2}{l_3}.$$

Припустимо, що ми виконуємо такий експеримент і одержуємо результати (у метрах)

$$l_1 = 50 \pm 0,5; \quad l_2 = 1,5 \pm 0,03; \quad l_3 = 5,0 \pm 0,2.$$

Наша найкраща оцінка для l дорівнює

$$l_{\text{найкращ.}} = \frac{50 * 1,5}{5} = 15 \text{ м.}$$

У відповідності до (7) відносна похибка цього результату дорівнює сумі відносних похибок в l_1, l_2, l_3 , які дорівнюють відповідно 1, 2 і 4%.

Таким чином,

$$\delta_l \approx \frac{\Delta l_1}{|l_1|} + \frac{\Delta l_2}{|l_2|} + \frac{\Delta l_3}{|l_3|} = \delta_{l1} + \delta_{l2} + \delta_{l3} + \frac{0,5}{|50|} + \frac{0,03}{|1,5|} + \frac{0,2}{|5,0|} = 0,01 + 0,02 + 0,04 = (1+2+4)\% = 7\%.$$

Абсолютна похибка для $l = 15 * 0,07 = 1,05$ м.

Отже, наш остаточний результат має вигляд: $l = 15 \pm 1$ м.

2.1 ПОХИБКИ ПІД ЧАС МНОЖЕННЯ ВИМІРЯНОЇ ВЕЛИЧИНИ НА ТОЧНЕ ЧИСЛО

Два важливі випадки використання правила (7) заслуговують окремого розгляду.

По-перше, припустимо, що ми вимірюємо величину x і використаємо її для обчислення добутку $q = Bx$, де число B без похибки.

Наприклад, ми могли б вимірювати діаметр кола, а потім обчислювати його периметр як $c = \pi * d$ або ми могли б вимірювати товщину T 100 ідентичних аркушів паперу, а потім визначати товщину одного аркуша як $t = (1/100) * T$.

У відповідності до правила (7) відносна похибка в $q = Bx$ дорівнює сумі відносних похибок для величин B і x .

$$\text{Оскільки } \Delta B = 0, \text{ то } \delta_b = \frac{\Delta b}{|B|} = 0.$$

$$\text{Таким чином: } \delta_q = \delta_x.$$

Щоб визначити абсолютну похибку величини q , зробимо декілька перетворень. А саме: $\Delta q = q * \delta q = q * \delta x = |B| * x * \delta x = |B| * x * \frac{\Delta x}{x} = |B| * \Delta x$.

$$\text{Отже, } \Delta q = |B| * \Delta x.$$

Таким чином, ми отримуємо наступне корисне правило:

Похибки добутку результату вимірювань на точне число	
Якщо величина x вимірюється з похибкою Δx і використовується для розрахунку добутку $q = B * x$, в якому <u>B не має похибки</u>, то похибка в q дорівнює : $\Delta q = B * \Delta x$	(8)

Це правило особливо корисне у випадку, коли потрібно вимірювати щось надзвичайно мале, але наявне у великій кількості, таке, наприклад, як товщина аркушу паперу або час обороту швидко обертаючого колеса. Наприклад, якщо ми вимірюємо товщину T 100 аркушів паперу і отримуємо результат:

$$\text{Товщина 100 аркушів} = T = 30 \pm 3 \text{ мм},$$

то звідси відразу ж витікає, що товщина t одного аркушу дорівнює

$$\text{товщина одного аркушу} = t = \frac{1}{100} * T = 0,3 \pm 0,03 \text{ мм}.$$

Необхідно примітити, як такий прийом (вимір товщини декількох ідентичних аркушів з наступним діленням на число аркушів) робить легко здійсненним вимірювання, яке у протилежному випадку потребувало б досить складного устаткування, і призводить також до винятково малої похибки. Звичайно, що необхідна впевненість, що всі аркуші мають однакову товщину.

2.2 Похибки за віднесення виміряної величини до ступеня

Другий окремий випадок правила (7) стосується оцінки ступеня деякої вимірюваної величини. Наприклад, ми могли б вимірювати швидкість v деякого тіла, а потім для визначення кінетичної енергії $(\frac{1}{2})m * v^2$ обчислювати v^2 . Оскільки $v^2 = v * v$, то із (7) витікає, що відносна похибка в v^2 дорівнює подвоєній відносній похибці в v .

Якщо узагальнити, то із (7) ясно, що загальне правило для будь-якого цілого ступеня буде наступним:

Похибка за віднесення до степеня	
Якщо величина x вимірюється з похибкою Δx і вимірне значення використовується для розрахунку ступеня цього числа $q = x^n$, то відносна похибка в q в n раз більша відносної похибки в x:	(9)
$\delta_q = n * \delta_x$	

Під час виведення цього правила вимагалось, щоб n було цілим і позитивним числом. Разом з тим, правило можна узагальнити на випадок будь-яких показників ступеня n (в одній із наступних лекцій).

Приклад

Припустимо, що експериментатор визначає прискорення вільного падіння g , вимірюючи час t падіння каменю з висоти h . Після декількох вимірювань часу він знаходить

$$t = 1,6 \pm 0,1 \text{ с}$$

і вимірює висоту h як

$$h = 14,1 \pm 0,1 \text{ м.}$$

Оскільки h визначається відомою формулою $h = (\frac{1}{2})g * t^2$ то він обчислює g як

$$g = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 * 14,1 \text{ м}}{(1,6 \text{ с})^2} = 11 \text{ м/с}^2.$$

Похибка цього результату може бути знайдена з допомогою сформульованого вище правила (9).

Тут нам необхідно знати відносні похибки в кожному із співмножників виразу $g = \frac{2h}{t^2}$, який використовується для розрахунку g . Співмножник 2 не містить похибки. Відносні похибки в h і t дорівнюють:

$$\delta_h = \frac{\Delta h}{|h|} = \frac{0,1}{|14,1|} = 0,007 = 0,7\%$$

$$i \quad \delta_t = \frac{\Delta t}{|t|} = \frac{0,1}{|1,6|} = 0,063 = 6,3 \%$$

У відповідності з правилом (10) відносна похибка в t^2 в 2 рази більша, ніж в t . Отже, застосовуючи правило (7) для добутків і часток до формули $g = \frac{2h}{t^2}$, ми одержимо для відносної похибки

$$\delta_g = \delta_h + 2 * \delta_t = 0,7\% + 2*(6,3\%) = 13,3\% \quad (11)$$

і, відповідно, похибку

$$\Delta g = (11 \text{ м/с}^2) * \frac{13,3}{100} = 1,46 \text{ м/с}^2.$$

Таким чином, остаточний результат нашого експериментатора (необхідним чином округлений) становить $g = 11 \pm 1 \text{ м/с}^2$.

Цей приклад показує, наскільки простою часто може бути оцінка похибок. Звідси також видно, яким чином **теорія похибок не тільки дозволяє оцінити величину похибок, але підказує шляхи їхнього зменшення.**

У цьому випадку з (11) видно, що найбільший внесок у похибку обумовлений виміром часу. Якщо ми хочемо мати більш точне значення g , то необхідно поліпшити саме вимір величини t ; будь-яка спроба поліпшити вимір h була б практично даремним зусиллям.

3. Випадкові та систематичні похибки

Вступ до Лекції.

Із попередніх лекцій ми вже знаємо, що під час проведення вимірювань виникають похибки і тому, одним із кращих способів оцінки коректності вимірювань є багатократне повторення їх з наступним порівнянням між собою отриманих значень.

Із попередніх лекцій ми також дізналися, що **не всі види експериментальних похибок можна виявити на основі статистичної обробки багатократних вимірювань.**

Саме тому **похибки розділяються на дві групи:**

- **випадкові похибки**, які піддаються обробці статистичними методами;
- **систематичні похибки**, до яких методи статистики застосувати безперспективно (вони таким чином не виявляються).

У даній лекції більша частина наступного матеріалу буде присвячена **статистичним методам обробки результатів вимірювань**, які були отримані саме в результаті багатократних повторень, а також виявленню **випадкових похибок.**

В кінці наступної лекції ми ще раз повернемося до важливої проблеми систематичних похибок і як їх враховувати під час виконання лабораторних робіт.

Таким чином, **експериментальні похибки**, які можна виявити за допомогою багатократних вимірювань, називаються **випадковими похибками**.

Ті похибки, які не можна виявити таким способом, називаються **систематичними похибками**.

Щоб проілюструвати різницю між цими видами похибок, розглянемо декілька прикладів.

Припустимо спочатку, що ми вимірюємо час одного обороту рівномірно обертаючого диска. Однією із причин похибок буде час нашої власної реакції під час запуску та зупинки секундоміра.

Якби цей час реакції завжди був точно тим самим, то два запізнення, обумовлені реакцією (перше – під час запуску, друге під час зупинки), **компенсували б одне одного**. Разом з тим, фактично час нашої реакції змінюється. Ми можемо більше забаритися під час запуску секундоміра і тим самим недооцінити час обороту, або ж більше затриматися під час його зупинки і в такому випадку переоцінити час.

В зв'язку з тим, що обидві можливості рівноймовірні, то знак ефекту випадковий.

За багатократного повторення вимірювань ми інколи будемо переоцінювати час, а інколи - недооцінювати. Таким чином, **нестабільний** (змінний) **час нашої реакції** буде проявлятися в розходженні отриманих результатів .

Аналізуючи **коливання в результатах методами статистики**, ми можемо **одержати дуже достовірну оцінку похибки** такого типу.

З іншого боку, якщо наш секундомір постійно відстає, то всі виміряні значення часу будуть недооцінені і **ніяка кількість повторень** (з тим же секундоміром) **не виявить цього джерела похибок**.

Похибка такого типу називається **систематичною**, оскільки вона завжди зміщує наш результат в один бік. (Якщо секундомір відстає, ми завжди недооцінюємо час, а якщо поспішає - завжди переоцінюємо.)

Систематичні похибки не можна виявити тими статистичними методами, про які зараз піде мова.

В якості другого прикладу проявлення випадкових і систематичних похибок розглянемо вимірювання точно визначеної довжини за допомогою лінійки.

Одне із джерел похибки - це необхідність в інтерполяції між мітками шкали, і ця **похибка**, ймовірно, є **випадковою**. (Під час інтерполяції ми з рівною ймовірністю як переоцінюємо, так і недооцінюємо результат.)

Але є також імовірність того, що наша лінійка дефектна, а це джерело похибки буде, імовірно, призводити до систематичної похибки. (Якщо лінійка видовжена, ми завжди недооцінюємо результат, якщо укорочена - завжди переоцінюємо.)

Подібно цим двом прикладам, майже всі вимірювання можуть піддаватися як випадковим, так і систематичним похибкам.

Не важко було б навести і інші приклади. Зокрема, необхідно звернути увагу на те, що типові джерела випадкових похибок - це невеликі похибки спостерігача (як у випадку інтерполяції), невеликі перешкоди, що впливають на апаратуру (подібні до механічних вібрацій), проблеми визначення і деякі інші.

Можливо, що найбільш очевидна причина систематичної похибки - це розкалібрування приладів (подібно секундоміру, що відстає, видовженій лінійці або приладу, у якого стрілка до початку вимірювань не була виставлена на нуль).

Розходження між випадковими та систематичними похибками не завжди можна чітко визначити.

Наприклад, за зміни положення вашої голови відносно приладу зі стрілкою (наприклад, на звичайному годиннику результати зчитування будуть змінюватися). Цей ефект називається паралаксом, і він призводить до того, що правильне зчитування зі шкали можливо тільки у випадку, коли ваша голова розташована точно перед стрілкою.

Навіть якщо ви дуже акуратний експериментатор, ви не зможете розташувати ваше око завжди точно перед стрілкою; отже, ваші вимірювання будуть містити малі похибки, пов'язані з паралаксом, і ця похибка буде, імовірно, випадковою.

З іншого боку, неуважний експериментатор, що поставить прилад зі стрілкою збоку від себе і забуде про вплив паралакса, внесе систематичну помилку в усі свої звіти про вимірювання.

Таким чином, один і той же самий ефект паралакса може призвести до випадкових похибок в одному випадку та систематичних - в іншому.

Врахування випадкових похибок кардинально відмінне від врахування систематичних похибок.

Статистичні методи, які ми розглянемо в цій лекції, дають достовірну оцінку випадкових похибок і, як ми побачимо, вказують шлях певного їх зменшення.

З іншого боку, систематичні похибки важко оцінити і навіть виявити.

Досвідчений експериментатор повинен **вміти передбачати можливі джерела систематичних похибок** і завчасно потурбуватися, щоб **всі невраховані ним систематичні похибки були значно менші необхідної точності вимірювання.**

Для цього потрібна, наприклад, перевірка стрілочних приладів за прийнятими стандартами, їхнє калібрування, або навіть, якщо необхідно, придбання більш досконалих приладів.

На жаль, у навчальній лабораторії така перевірка приладів майже неможлива, тому врахування систематичних похибок завжди являє собою нелегку справу.

Ми у наших лекціях ще повернемося до питання систематичних похибок, а поки що будемо розглядати експерименти, для яких всі **джерела систематичних похибок** виявлені та вжиті необхідні заходи, щоб ці похибки були набагато менші необхідної точності .

4. СЕРЕДНЄ ЗНАЧЕННЯ І СТАНДАРТНЕ ВІДХИЛЕННЯ

Припустимо, що нам треба виміряти деяку величину x і що ми виявили всі джерела систематичних похибок і зменшили їхній вплив до рівня, яким можна знехтувати.

Оскільки всі інші джерела похибок - випадкові, ми зможемо виявити їх за багатократного повторення вимірювань.

Можна було б, наприклад, виконати вимірювання п'ять разів і одержати результати (вибірку)

$$71, 72, 72, 73, 71 \quad (12)$$

(де для зручності ми не вказали одиниці виміру).

Перше питання, яке можна задати: якщо дано п'ять вимірених значень (1), то що ми повинні прийняти за $x_{\text{найкращ.}}$ нашої величини x ?

Представляється розумним, щоб нашої **найкращою оцінкою було середнє значення**, або середнє x п'яти знайдених значень, і надалі ми доведемо, що це звичайно так і є.

$$\text{Таким чином, } x_{\text{найкращ.}} = \bar{x} = \frac{71 + 72 + 72 + 73 + 71}{5} = 71,8 \quad (13)$$

У більшє загальному випадку припустимо, що ми робимо N вимірювань величини x (використовуючи ту саму апаратуру та метод вимірювання) і отримуємо N значень:

$$x_1, x_2, \dots, x_N. \quad (14)$$

І цього разу найкращою оцінкою величини x зазвичай буде середнє значення від $x_1, x_2, \dots, x_N$, тобто $x_{\text{найкращ.}} = \bar{x}$. (15)

де

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum x_i}{N} \quad (16)$$

В останньому рядку ми ввели позначення $\sum$, відповідно до якого $\sum_{i=1}^N x_i = \sum_i x_i = \sum x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_N$,

де другий та третій вираз - звичайні скорочення, які ми будемо використати, коли не виникає небезпека плутанини.

Поняття середнього значення, або середнього, зазвичай, усім Вам добре знайоме.

Наступне ваше поняття, **стандартне відхилення**, імовірно, менш відоме.

Стандартне відхилення результатів вимірювань $x_1, x_2, \dots, x_N$ – це **оцінка середньої похибки результатів вимірювань $x_1, x_2, \dots, x_N$** , яке визначається в такий спосіб.

Якщо прийняти, що середнє $\bar{x}$ - це найкраща оцінка величини x , то природно розглянути різницю $x_i - \bar{x} = d_i$. Ця різниця, яку часто називають **відхиленням** (або залишком) x_i від $\bar{x}$, показує, наскільки результат i -го вимірювання x_i вирізняється від середнього значення $\bar{x}$.

Якщо відхилення $d_i = x_i - \bar{x}_i$ дуже незначні, то результати наших вимірювань близькі одне до одного і, ймовірно, досить точні.

Якщо деякі з відхилень великі, то наші вимірювання, мабуть, не досить точні.

Щоб бути впевненими, що ми засвоїли поняття відхилення, обчислимо відхилення для набору із п'яти результатів вимірювань, наведених в табл.1.

Таблиця 1 - Розрахунок відхилень

№ вимірювання	Середнє значення - $\bar{x}_i$	Відхилення - $d_i = x_i - \bar{x}_i$
1	71	-0,8
2	72	0,2
3	72	0,2
4	73	1,2
5	71	-0,8
	$\bar{x} = 71,8$	$d = 0,0$

Результати розрахунку надані в табл. 1.

Необхідно звернути увагу, що відхилення (зазвичай) не всі однакові; d_i незначне, якщо в i -м результаті вимірювання x_i виявляється близьким до $\bar{x}$, але d_i значне, якщо x_i далеко відстоїть від $\bar{x}$.

Необхідно примітити також, що деякі з d_i позитивні, а деяких - негативні, тому що деякі x_i більші за середнє значення $\bar{x}$, а деякі - менші.

Щоб оцінити вірогідність результатів вимірювань $x_1, x_2, \dots, x_N$ в середньому, ми могли б, природно, спробувати розрахувати середнє значення відхилення d_i .

На жаль, як показують результати табл. 1, середнє значення відхилень дорівнює нулю. Насправді так буде у випадку будь-якого набору результатів вимірювань $x_1, x_2, \dots, x_N$, оскільки вже саме визначення середнього значення $\bar{x}$ призводить до того, що $d_i = x_i - \bar{x}_i$ інколи позитивні, а інколи негативні таким чином, щоб d дорівнювало нулю.

В зв'язку з цим, середнє відхилень - це не краща характеристика вірогідності результатів вимірювань $x_1, x_2, \dots, x_N$.

Кращий спосіб обійти цю ситуацію - піднести до квадрата всі відхилення, які в цьому випадку будуть утворювати набір позитивних чисел, а потім знайти середнє цих чисел.

Якщо ми тепер добуємо квадратний корінь із отриманого результату, то отримаємо величину, що вимірюється в тих же одиницях, що і сама величина x .

Це число називається **стандартним відхиленням** $x_1, x_2, \dots, x_N$ і позначається σ_x :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (17)$$

Виходячи із цього позначення, стандартне відхилення (або **СВ**) можна описати як **середньоквадратичне (СКВ) відхилень** результатів вимірювань $x_1, x_2, \dots, x_N$, і, таким чином, можна показати, що це якісно новий спосіб оцінки вірогідності вимірювань. (Як ми побачимо незабаром, визначення (6) іноді модифікується таким чином, що в знаменнику замість N ставлять $N-1$.)

Щоб обчислити стандартне відхилення σ_x у відповідності до (17), ми повинні спочатку розрахувати відхилення d_i піднести їх до квадрату, знайти середнє цих квадратів, а потім добути квадратний корінь із середнього.

Для п'яти вимірювань із табл. 1 ми могли б розрахувати σ_x , як показано в табл. 2.

Таблиця 2. – Розрахунок стандартного відхилення

№ вимірювання	Вимірювання значення x_i	Відхилення $d_i = x_i - \bar{x}_i$	d_i^2
1	71	-0,8	0,64
2	72	0,2	0,04
3	72	0,2	0,04
4	73	1,2	1,44
5	71	-0,8	0,64
	$\bar{x} = 71,8$		$\sum d_i^2 = 2,80$

Підсумовуючи числа d_i^2 із четвертого стовпця табл.2 і поділивши суму на 5, ми отримуємо величину σ_x^2 (яку часто називають дисперсією вимірювань):

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum d_i^2 = \frac{2,80}{5} = 0,56 \quad (18)$$

Добуваючи квадратний корінь, знаходимо **стандартне відхилення**

$$\sigma_x \approx 0,75 \quad (19)$$

Таким чином, середня похибка результатів п'яти вимірювань

71, 72, 72, 73, 71 приблизно дорівнює 0,75.

На жаль, є альтернативне визначення стандартного відхилення.

Існують теоретичні аргументи, згідно з яким фактор N варто замінити на $(N-1)$, в зв'язку з чим стандартне відхилення σ_x для $x_1, x_2, \dots, x_N$ визначається як

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum d_i^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})^2} \quad (20)$$

В даному випадку ми не будемо пробувати довести, що визначення (20) для σ_x краще, але відзначимо, що нове "поліпшене" визначення, мабуть, призводить до не на багато більшого значення, ніж старе, і це дещо компенсує недооцінку похибки в результатах вимірювань $x_1, x_2, \dots, x_N$ особливо у випадку, коли число вимірювань N мале.

Існування такої тенденції можна зрозуміти, якщо розглянути граничний (і абсурдний) випадок, коли $N = 1$ (тобто випадок, коли ми зробили тільки одне вимірювання). У цьому випадку середнє значення x дорівнює єдиному значенню $\bar{x}$ і єдине відхилення автоматично дорівнює нулю. Таким чином, визначення (17) призводить до абсурдного результату, що $\sigma_x = 0$.

З іншого боку, визначення (20) призводить до невизначеності типу 0/0, тобто, згідно (20), σ_x - невизначена величина, що коректно відбиває нашу повну непоінформованість про похибки після виконання тільки одного вимірювання.

Визначення (6) іноді називають **стандартним відхиленням генеральної сукупності**, а (9)- **вибірковим стандартним відхиленням**.

Розходження між двома виразами (17) і (20) у чисельному відношенні майже завжди незначне.

Кожний може повторити вимірювання багато разів (принаймні п'ять разів і значно більше). Навіть якщо ми зробимо тільки п'ять вимірювань ($N = 5$), різниця між $\sqrt{N}=2,2$ і $\sqrt{N-1}=2$ для більшості випадків незначна.

Наприклад, якщо ми перерахуємо стандартне відхилення за допомогою "поліпшеного" визначення, те отримаємо $\sigma_x = 0,84$ замість $0,75$, тобто не таку вже значну різницю. Проте необхідно знати, що існують два визначення. Імовірно, завжди краще використати більш консервативне (тобто визначення, що призводить до більшого значення), але в кожному разі у звіті з лабораторної роботи завжди повинно бути ясно зазначено, яке визначення використане, щоб можна було б перевірити розрахунки.

5. СТАНДАРТНЕ ВІДХИЛЕННЯ – ЯК ПОХИБКА ОДИНИЧНОГО ВИМІРУ

Ми відзначили, що **стандартне відхилення σ_x характеризує середню похибку результатів вимірювань $x_1, x_2, \dots, x_N$** за якими воно було обраховане.

Пізніше в лекціях ми приведемо обґрунтування цього, довівши наступне більш точне твердження.

Якщо результати наших вимірювань розподілені нормально і якщо ми повторимо вимірювання x дуже велику кількість разів (завжди з тією ж апаратурою), то приблизно 70 % результатів наших вимірювань x будуть лежати в межах $\pm \sigma_x$ від $\bar{x}$, тобто 70% результатів наших вимірювань будуть лежати в інтервалі $x \pm \sigma_x$.

Це твердження можна перефразувати таким чином. Припустимо, як і раніше, ми отримали значення $x_1, x_2, \dots, x_N$ і обчислили $\bar{x}$ і σ_x . Якщо потім ми робимо ще одне вимірювання (з тією ж апаратурою), то ймовірність того, що результат нового вимірювання буде лежати в межах $\pm \sigma_x$ від $\bar{x}$, дорівнює 70 %. Далі, якщо число вимірювань N було значним, те $\bar{x}$ повинне бути дуже надійної оцінкою дійсного значення x .

Отже, ми можемо сказати, що ймовірність того, що **одиничне вимірювання** (отримане з тією ж апаратурою) **не буде вирізнятися більш ніж на $\pm\sigma_x$ від дійсного значення, дорівнює 70%.**

Ясно, що σ_x означає саме те, для чого ми використали термін "похибка" у попередніх лекціях. Якщо ми робимо одне вимірювання величини x , використовуючи дану апаратуру, то похибка, пов'язана із цим вимірюванням, повинна бути оцінена як $\Delta x = \sigma_x$; за такого вибору похибки ми на 70% упевнені, що результат нашого вимірювання буде лежати в межах $\pm\Delta x$ від фактичного значення.

Щоб проілюструвати використання цих понять, припустимо, що в нас є коробка з однаковими пружинами і що нас попросили виміряти їхні коефіцієнти пружності k . Можна було б вимірювати коефіцієнти пружності, підвішуючи вантажі до кожної пружини і визначаючи розтягання або, що, мабуть, краще, підвішуючи якусь масу до кожної пружини і вимірюючи час її коливань. Який би метод ми не вибрали, нам необхідно взнати k і його похибку Δk для кожної пружини, але було б марнотратством часу багатократне повторення наших вимірювань для кожної пружини.

Замість цього можна міркувати в такий спосіб. Якщо ми виміряємо k для першої пружини декілька раз (скажемо, 10 або 20), то середнє цих вимірювань повинне дати добру оцінку k для першої пружини. Більш важливо в цьому випадку те, що стандартне відхилення σ_k цих 10 або 20 вимірювань дає нам оцінку похибки нашого методу вимірювань k . За умови, що всі наші пружини в прийнятній мірі однакові і що ми використовуємо той же самий метод вимірювання, ми могли б з достатньою підставою очікувати тієї ж самої похибки в будь-якому іншому вимірюванні. Таким чином, для кожної наступної пружини нам потрібно провести тільки одне вимірювання, і ми можемо відразу ж зробити висновок, що оскільки Δk дорівнює стандартному відхиленню σ_k , отриманому для першої пружини, то з ймовірністю 70% наш результат буде лежати в межах від фактичного значення.

Щоб чисельно проілюструвати ці поняття, уявимо собі, що проведено 10 вимірювань для першої пружини і отримані наступні значення k (в ньютонках на метр):

$$86, 85, 84, 89, 86, 88, 88, 85, 83, 85, \quad (21)$$

За цим даними ми обчислюємо $k = 85,9 \text{ Н/м}$ і за визначенням (20)

$$\sigma_k = 1,9 \text{ Н/м} \approx \quad (22)$$

$$\approx 2 \text{ Н/м}. \quad (23)$$

Таким чином, похибка в будь-якому окремому вимірюванні становить приблизно 2 Н/м. Якщо ми тепер зробимо одне вимірювання для другої пружини

і отримаємо результат $\bar{k} = 71 \text{ Н/м}$, то можна без подальшої турботи прийняти, що $\Delta k = \sigma_k = 2 \text{ Н/м}$, і стверджувати з 70%-ною імовірністю, що k для другої пружини

$$= 71 \pm 2 \text{ Н/м.} \quad (24)$$

6. СТАНДАРТНЕ ВІДХИЛЕННЯ СЕРЕДНЬОГО

Якщо $x_1, x_2, \dots, x_N$ - результати N вимірювань однієї і тієї ж величини x , то, як ми розуміємо, що наша найкраща оцінка величини x є їх середнє $\bar{x}$. Ми також розуміємо, що стандартне відхилення σ_x характеризує середню похибку окремих вимірювань $x_1, x_2, \dots, x_N$.

Разом з тим, наш результат $x_{\text{найкращ.}} = \bar{x}$ є розумною комбінацією всіх N вимірювань, і тому є підстави думати, що він буде більш надійним, ніж кожне з окремих вимірювань.

Пізніше в наших лекціях ми доведемо це, тобто отримаємо, що похибка за визначення значення $x_{\text{найкращ.}} = \bar{x}$ дорівнює стандартному відхиленню σ_x , поділеному на $\sqrt{N}$. Ця величина називається **стандартним відхиленням середнього** і позначається як $\sigma_{\bar{x}}$:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{N} \quad (25)$$

(Інші назви - **стандартна похибка** або **стандартна похибка середнього**).

Таким чином, ґрунтуючись на N вимірних значеннях $x_1, x_2, \dots, x_N$, ми можемо сформулювати наш кінцевий результат для значення величини x як

$$(\text{значення } x) = x_{\text{найкращ.}} \pm \Delta x.$$

де $x_{\text{найкращ.}} = \bar{x}$ ($\bar{x}$ - середнє від $x_1, x_2, \dots, x_N$), а Δx — стандартне відхилення середнього

$$\Delta x = \sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{N} \quad (26)$$

В якості приклада розглянемо десять результатів вимірювань, наведених в (10). Це результати десяти вимірювань коефіцієнта пружності для однієї пружини. Як ми вже знаємо, середнє цих значень є $\bar{k} = 85,9 \text{ Н/м}$ і стандартне відхилення дорівнює $\sigma_k = 1,9 \text{ Н/м}$.

Отже, стандартне відхилення середнього дорівнює

$$\sigma_{\bar{k}} = \sigma_k / \sqrt{N} = 0,6 \text{ Н/м}, \quad (27)$$

і наш кінцевий результат, заснований на цих десятих вимірах, для коефіцієнта пружності пружини буде дорівнювати:

$$k = 85,9 \pm 0,6 \text{ Н/м}. \quad (28)$$

Коли ми наводимо вираз, подібний цьому, то важливо вказати, що означають наші числа, а саме **середнє та стандартне відхилення середнього**, щоб можна було судити про їхню значимість.

Важливою величиною в стандартному відхиленні середнього $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{N}$ є множник $\sqrt{N}$ у знаменнику.

Стандартне відхилення σ_x характеризує середню похибку в індивідуальних вимірюваннях $x_1, x_2, \dots, x_N$ (певної вибірки результатів вимірювання). Тому, якби ми змушені були виконати ще декілька вимірювань (використовуючи ту ж саму апаратуру), то це не призвело б до помітної зміни стандартного відхилення σ_x .

З іншого боку, **стандартне відхилення середнього $\sigma_x / \sqrt{N}$ повільно зменшувалося б зі збільшенням N . Саме цього ми б і очікували. Якби ми провели значну (велику) кількість вимірювань перед обчисленнями середнього значення, то ми, природно, очікували б, що кінцевий результат буде більше надійним, а саме це і гарантує нам знаменник $\sqrt{N}$.**

Саме цей фактор забезпечує також очевидний спосіб збільшення точності наших вимірювань.

На жаль, $\sqrt{N}$ зростає досить повільно зі збільшенням N . Наприклад, якщо ми хочемо збільшити точність в 10 разів просто за рахунок збільшення числа вимірювань N , ми повинні були б збільшити N в 100 разів – перспектива не з приємних. Більше того, ми поки що зневажали систематичними похибками, а вони не зменшуються зі збільшенням числа вимірювань.

Таким чином, на практиці, якщо стоїть задача значно підвищити точність, необхідно, ймовірно шукати кращий підхід - необхідно вдосконалювати апаратуру, а не надіятись на збільшення числа вимірювань.

Приклади

У якості першого простого приклада **використання стандартного відхилення середнього** уявимо собі, що ми повинні дуже точно виміряти площу **S** прямокутної пластинки розміром приблизно 2,5см x 5,0 см. Спочатку ми підберемо потрібний вимірювальний прилад, яким може бути штангенциркуль, і потім зробимо декілька вимірювань довжини **l** і ширини **b** пластинки.

Щоб врахувати неоднорідності сторін, ми виконаємо вимірювання для декількох різних положень пластинки, а невеликі дефекти приладу врахуємо, використовуючи декілька різних штангенциркулів (якщо вони є). Ми могли б зробити по десять вимірювань величин **l** і **b** і отримати результати, наведені в табл. 3.

Таблиця 3. – Приклад розрахунку стандартного відхилення та стандартного відхилення середнього

Вимір. велич.	Виміряні значення	Середнє значення - $\bar{x}_i$	Стандартне відхилення σ_x	Стандартне відхилення середнього $\sigma_{\bar{x}}$
l	24,25; 24,26; 24,22; 24,28; 24,24; 24,25; 24,22; 24,26; 24,23; 24,24.	24,245	0,019	0,006
b	50,36; 50,35; 50,41; 50,37; 50,36; 50,32; 50,39; 50,38; 50,36; 50,38.	50,368;	0,024	0,008

По десяти отриманих значеннях **l** ми легко можемо обчислити середнє **l** стандартне відхилення σ_l і стандартне відхилення середнього $\sigma_{\bar{l}}$, що показано в стовпцях табл.3. Аналогічно ми можемо обчислити **b**, σ_b і $\sigma_{\bar{b}}$. Перш ніж робити наступні розрахунки, необхідно, в першу чергу, проаналізувати ці результати, щоб переконатися, чи знаходяться вони в розумних межах. Наприклад, два стандартних відхилення σ_l і σ_b - це, як відомо, середні похибки у вимірюваннях **l** і **b**. Оскільки **l** і **b** вимірялися тим самим методом, то було б досить дивно, якби σ_l і σ_b істотно вирізнялися одне від одного або від тієї величини, що ми приймаємо за розумну похибку вимірювань .

Тільки переконавшись в тому, що отримані до цього часу результати цілком надійні, ми можемо швидко закінчити розрахунки. Наша найкраща оцінка для довжини є середнє **l**, а її похибка - $\sigma_{\bar{l}}$; таким чином, остаточний результат для **l** буде

$$l = 24,245 \pm 0,006 \text{ мм (або } 0,025 \text{ \%)}$$

де число у дужках є відносна похибка у відсотках.

Аналогічно результат для **b** має вигляд

$$b = 50,368 \pm 0,008 \text{ мм (або } 0,016 \text{ \%)}.$$

Нарешті, наша найкраща оцінка для площі $S = l * b$ дорівнює добутку цих значень довжини та ширини, а її відносна похибка визначається квадратичною сумою відносних похибок в l і b (у припущенні, що похибки незалежні):

$$S = l * b = 24,245 \text{ мм} * 50,368 \text{ мм} = 1221,17 \text{ мм}^2.$$

$$\text{Відносна похибка (вимір. } l) \Delta l = \frac{\Delta l}{|l_{\text{найкращ}}|} = \frac{0,006}{|24,25|} * 100 = 0,025 \text{ \%};$$

$$\text{Відносна похибка (вимір. } b) \Delta b = \frac{\Delta b}{|b_{\text{найкращ}}|} = \frac{0,008}{|50,368|} * 100 = 0,016 \text{ \%}.$$

$$\text{Відносна похибка в } S \text{ є квадратичною сумою} = \sqrt{(0,025)^2 + (0,016)^2} = \underline{0,03 \text{ \%}}.$$

$$S = 1221,17 \text{ мм}^2 \pm 0,03 \% = 1221,2 \pm 0,4 \text{ мм}^2. \quad (29)$$

Щоб отримати результат (29) для S , ми обчислили середні l і b з їх похибками, рівними стандартним похибкам відповідних середніх. Потім ми розрахували площу S як добуток l і b і визначили похибку в S , як у непрямому вимірюванні. Ми могли б підійти інакше. Наприклад, можна було б перемножити перші виміряні значення l і b і одержати перше значення S . Продовжуючи тим же способом, ми могли б одержати десять результатів для S і потім, застосовуючи методи статистики до цих 10 результатів, розрахувати $\bar{S}$, σ_S і нарешті $\sigma_{\bar{S}}$.

Однак, якщо похибки в l і b незалежні і випадкові і якщо ми проробили достатню кількість вимірювань, цей альтернативний метод дасть (як буде доказано на практичному занятті) той же самий результат, що й попередній метод).

В якості другого прикладу розглянемо випадок, коли не можна застосовувати звичайні статистичні методи до результатів прямих вимірювань, але можна - до кінцевих результатів. Припустимо, що ми хочемо виміряти коефіцієнт пружності k пружини, визначаючи період коливань для деякої маси m , прикріпленої до її кінця.

З елементарної механіки відомо, що період таких коливань дорівнює

$$T = 2\pi * \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Таким чином, вимірюючи T і m , ми можемо знайти k за формулою

$$k = 4\pi^2 m / T^2$$

Найпростіший спосіб визначити k - це взяти одну масу m , відому з заданою точністю, і проробити декілька акуратних вимірювань T . Однак за різних причин більше цікавим було б вимірювання T для різних мас m . (Наприклад, у цьому випадку поряд з вимірюванням k ми могли б перевірити, що $T \approx \sqrt{m}$) Тоді можна було б отримати ряд значень, подібних наведеним у двох перших рядках табл. 4.

Таблиця 4. Вимірювання коефіцієнта пружності пружини k

Маса m , кг	0,513	0,581	0,634	0,691	0,752	0,834	0,901	0,950
Період T , с	1,24	1,33	1,36	1,44	1,50	1,59	1,65	1,69
$k = 4\pi^2 m / T^2$	13,17	12,97	і т.д					

Очевидно, немає ніякого сенсу розраховувати середні значення різних мас, наведених у першому рядку (а також і значення періодів у другому рядку), тому що вони не є різними результатами вимірювань однієї і тієї ж величини.

Ми також нічого не зможемо сказати про похибки наших вимірювань, якщо будемо порівнювати ці різні значення m . З іншого боку, кожне значення m можна об'єднати з відповідним значенням періоду T і обчислити k , як показано в останньому рядку табл. 4.

Наші дані для k в останньому рядку являють собою результати вимірювань однієї й тієї ж величини, і, таким чином, до них можуть застосовуватися статистичні методи. Зокрема, найкращою оцінкою k буде середнє $k = 13,16$ Н/м, а похибкою - стандартне відхилення середнього $\sigma_{\bar{k}} = 0,06$ Н/м (за умови, що ми до кінця розрахуємо значення k в табл.4).

Таким чином, підсумковий результат, оснований на даних табл. 4, має вигляд
коефіцієнт пружності пружини $k = 13,16 \pm 0,06$ Н/м,

Якби ми отримали розумні оцінки похибок для наших вихідних вимірювань m і T , то ми також могли б оцінити похибку k , використовуючи відповідні статистичні методи розрахунку похибок і поклавши в основу ці оцінки для Δm і ΔT ¹⁾.

У цьому випадку непогано було б порівняти похибки в k , отримані двома методами.

¹⁾ Вимірювання, результати яких наведені в табл.4, називають **спільними вимірюваннями двох величин** (в даному випадку m і T). Адекватним методом обробки результатів таких вимірювань є **метод найменших квадратів** (МНК).

7. ДОДАТКОВО ПРО СИСТЕМАТИЧНІ ПОХИБКИ ДЛЯ УЧБОВИХ ЛАБОРАТОРІЙ

В останніх декількох лекціях ми вважали як саме по собі зрозумілим, що **ще до початку вимірювань всі систематичні похибки зведені до такого малого рівня, що ними можна знехтувати.**

Зараз ми знову повернемося до тієї неприємної ситуації, коли є помітні **систематичні похибки.**

У розглянутому вище прикладі ми могли б вимірювати m на вагах, які систематично давали б завищені або занижені показання, або наші годинники могли б поспішати або відставати.

Жодна із цих систематичних похибок не проявилася б у процедурі порівняння різних результатів для коефіцієнта пружності пружини k .

Звідси можна зробити висновок, що стандартне відхилення середнього $\sigma_{\bar{k}}$ варто розглядати як випадкову складову $\Delta k_{\text{вип.}}$ похибки Δk , але однозначно не як повну похибку Δk .

Наше завдання зводиться до того, щоб вирішити, як оцінити **систематичну складову** $\Delta k_{\text{систем.}}$, а потім - як скомбінувати $\Delta k_{\text{вип.}}$ і $\Delta k_{\text{сист.}}$, щоб одержати повну похибку Δk .

Не існує простої теорії, що вказала б, як нам поступати з систематичними похибками.

Фактично єдина теорія систематичних похибок полягає в тому, що вони повинні бути виявлені та зменшені настільки, щоб стати набагато меншими за точність вимірювань .

Разом з тим, у навчальній лабораторії це зробити часто неможливо. Як правило, немає можливості повірити стрілочний прилад відносно більш надійного, щоб прокалібрувати його, і ще менше шансів - купити новий прилад з метою замінити несправний старий. Із цієї причини в деяких навчальних лабораторіях прийнято за правило, що в умовах відсутності точної інформації кожному приладу треба прописати певну систематичну похибка. Наприклад, можна було б вирішити, що всі секундоміри мають 0,5 %-ву систематичну похибку, всі ваги -1%-ву, всі вольтметри та амперметри - 3%-ву і т.д.

Озброївшись правилами такого типу, можна просуватися далі різними шляхами. Вибір кожного з них неможливо строго обґрунтувати, і зараз ми розглянемо тільки один зі шляхів.

У випадку останнього приклада з попереднього розділу лекції коефіцієнт пружності пружини $k = 4\pi^2 m / T^2$ визначався за допомогою вимірювань ряду значень m і відповідних значень T . Як було відзначено, статистичний аналіз різних значень k призводить до наступної випадкової складової Δk :

$$\Delta k_{\text{вип}} = \sigma_{\bar{k}} = 0,06 \text{ Н/м.}$$

Нехай нам відомо, що ваги, які використовуються для вимірювання m , і годинники, що використовуються для вимірювання T , мають систематичні похибки 1 і 0,5%, відповідно. Тепер ми можемо знайти систематичну складову похибки Δk методом розрахунку похибок в непрямих вимірюваннях, причому виникає тільки одне питання: складати похибки квадратично або безпосередньо?

Оскільки похибки в m і T однозначно незалежні і тому можлива деяка компенсація, то, ймовірно, розумно використати квадратичну суму, що дає ¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{\Delta k_{\text{сист}}}{k} &= \sqrt{\left(\frac{\Delta m_{\text{сист}}}{m}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta T_{\text{сист}}}{T}\right)^2} = \\ &= \sqrt{1 + 1} \% = 1,4\% \end{aligned}$$

і, отже,

$$\Delta k_{\text{сист}} = (13,16 \text{ Н/м}) * 0,014 = 0,18 \text{ Н/м.}$$

Тепер, оскільки ми оцінили як випадкову, так і систематичну складові Δk , нам залишається тільки якось скомбінувати їх, щоб отримати саму величину Δk .

Можна було б обґрунтувати необхідність їхнього квадратичного додавання, і тоді повна похибка мала б вид

$$\begin{aligned} \Delta k &= \sqrt{(\Delta k_{\text{вип}})^2 + (\Delta k_{\text{сист}})^2} = \\ &= \sqrt{(0,06)^2 + (0,18)^2} = 0,189 \approx 0,2 \text{ Н/м} \end{aligned}$$

У цьому прикладі систематична похибка повністю домінує над випадковою.

Вираз (25) для Δk не може бути строго доведений. Не ясний також зміст отриманого виразу: наприклад, ми, очевидно, не можемо стверджувати, що з ймовірністю 70% істинне значення лежить в інтервалі $k \pm \Delta k$. Разом з тим, цей

вираз дає принаймні розумну оцінку повної похибки в умовах, коли наші прилади мають систематичні похибки, які ми не змогли ліквідувати.

Зокрема, існує один важливий аспект, внаслідок якого результат (25) правдоподібний і повчальний. У лекції раніше ми говорили, що стандартне відхилення середнього прагне до нуля зі збільшенням числа вимірювань N . Це положення означало, що якщо ми запаслися терпінням і виконуємо величезне число вимірювань, то можемо нескінченно зменшувати похибку, не вдосконалюючи нашого обладнання або методу вимірювань. Тепер ми можемо бачити, що в дійсності це не так.

Збільшення N призведе до необмеженого зменшення випадкової складової $\Delta k_{\text{вип}} = \sigma_{\bar{k}}$. Але будь-яка дана апаратура характеризується деякими систематичними похибками, які не зменшуються, коли ми збільшуємо N . З (25) ясно, що немає великої вигоди надалі зменшувати $\Delta k_{\text{вип}}$, коли величина $\Delta k_{\text{вип}}$ стала меншою за $\Delta k_{\text{сист.}}$

Зокрема, повна Δk ніколи не може бути меншою за $\Delta k_{\text{сист.}}$. Все це тільки підтверджує те, про що ми вже догадувалися, а саме що на практиці значне зменшення похибки вимагає покращення в методі вимірювань або в обладнанні, щоб зменшити як випадкову, так і систематичну похибки в кожному окремому вимірюванні.

¹⁾ Повинні ми використовувати квадратичну чи звичайну суму, в дійсності залежить від того, що мається в виду, коли заявляємо, що ваги мають 1% систематичну похибку.

Якщо це твердження має смисл, що ця похибка певним чином не перевищує 1% (аналогічно для секундмірів), та адекватним буде рішення безпосередньої суми похибок і, таким чином, $\Delta k_{\text{сист.}}$ не буде перевищувати 2%. З іншого боку повідірка ваг в лабораторії може показати, що для них справедливий нормальний розподіл, і тому 70% із них мають похибку, меншу за 1% (аналогічно для секундмірів). в цьому випадку ми повинні були б використати формулу квадратичної суми і 70% ймовірність для інтервалу.

Рекомендована література

1. Корбутяк В.І. Методологія системного підходу та наукових досліджень: Навч. посібник / В.І. Корбутяк. – Рівне: НУВГП, 2010. – 176с.
2. Крушельницька О.В. Методологія та організація наукових досліджень: навч. посібник. К.: Кондор, 2006. 206 с.
3. Клименюк О.В. Методологія та методи наукового дослідження: Навчальний посібник. К.: Міленіум, 2005. 186 с.
4. Шейко В., Кушнарєнко Н. Організація та методика науково-дослідницької діяльності: Підручник. –К.: Знання –Прес, 2003. –295 с.
5. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 272 с.

ЛЕКЦІЯ № 4 " НОРМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ СТАТИСТИЧНОЇ ВЕЛИЧИНИ "

План лекції:

1. Гістограми і розподіл випадкових величин;
2. Граничний розподіл випадкових величин;
3. Нормальний розподіл випадкової величини.

ВСТУП до Лекції.

В цій лекції ми продовжимо розгляд статистичних методів обробки багатократних вимірювань.

Для нас вже знайомі поняття **середнього, стандартного відхилення і стандартного відхилення середнього**, які ми отримуємо завдяки використанню саме статистичних методів.

В цій лекції та наступних ми будемо розглядати **теоретичне обґрунтування цих та інших статистичних понять, які ми приймали без доведень в попередніх лекціях**.

Перша проблема, з якою доводиться мати справу під час обговорення багатократних вимірювань, - це **пошук методів, які б дозволили виконувати різні операції з масою отриманих результатів і отримувати відповідні значення**.

Один із зручних методів – це використання розподілу або гістограм.

В цій лекції ми введемо поняття граничного розподілу випадкової величини. Потім буде визначено, що таке **нормальний розподіл або розподіл Гауса**, який описує граничний розподіл результатів будь-якого вимірювання.

(Звичайно, що вимірювання піддається великому числу незначних випадкових похибок).

Як тільки математичні характеристики нормального розподілу будуть зрозумілими, ми зможемо проступити до **доведення декількох важливих положень**.

В наступних лекціях ми докажемо все те що прийняли раніше як постулат. І серед всього головне, що 70% результатів всіх вимірювань (однієї і тієї ж величини, які проведені на одній і ті ж апаратурі) повинні розміщуватися в межах одного стандартного відхилення від істинного значення.

1. ГІСТОГРАМИ І РОЗПОДІЛ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Очевидно, що серйозний статистичний аналіз результатів експерименту вимагає проведення багатократних вимірювань.

Тому, однією із перших задач, яку потрібно вирішити при цьому – це знайти спосіб запису та форми подання цих результатів.

Експериментатору в своїй практичній діяльності часто доводиться мати справу з багатократними вимірюваннями однієї і тієї ж величини.

Приклад: заміри певного показника міцності паперу виконуються в умовах виробництва через певні (визначені) проміжки часу. Запис цих замірів фіксується в робочому журналі.

Таким чином, результати вимірювань заданої величини носять **ймовірнісний** характер і це проявляється в тому, що числові значення відхилення кожного із вимірювань відмінні від істинного значення вимірюваної величини.

Задача експериментатора, в першу чергу, полягає в тому, щоб відшукати методи запису і відображення великої кількості вимірювань.

Припустимо, що ми повинні зробити десять вимірювань деякої довжини x (це може бути відстань в см):

26 24 26 28 23 24 25 24 26 25 (1)

За такої форми запису ці числа дають нам досить мало інформації. Якщо ми повинні були б таким способом записати дуже велике число результатів вимірювань, то, звичайно що, отримали б неупорядковані "джунглі" чисел.

Напрошується кращий спосіб запису.

В якості першого кроку зробимо таке:

23 24 24 24 25 25 26 26 26 28 (2)

А потім:

Різні значення	x_k	23	24	25	26	27	28
Число реалізацій	n_k	1	3	2	3	0	1

Якщо ми записали результати вимірювань, як показано вище, то тепер можливо переписати визначення середнього $\bar{x}$ таким способом, який виявиться більш зручним.

Так, із нашого попереднього визначення ми знаємо, що

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{23 + 24 + 24 + \dots + 28}{10}. \quad (3)$$

Але це те саме, що і $\bar{x} = \frac{23 + (24 * 3) + (25 * 2) + \dots + 28}{10}.$

або в загальному вигляді $\bar{x} = \frac{\sum_k x_k * n_k}{N} \quad (4)$

Сума подібна (4) називається сумою з ваговими множниками або зваженою сумою, оскільки кожне значення x_k перемножується на ваговий співмножник (зважується) – число n_k , яке показує скільки разів це значення було реалізоване.

Якщо ми складемо всі числа n_k , то отримаємо повне число реалізованих вимірювань N , тобто

$$\sum_k n_k = N \quad (5)$$

Замість використання числа n_k введемо відношення: $F_k = \frac{n_k}{N}$, (6)

яке являє собою долю повного числа N вимірювань і назовемо його частотою.

В термінах F_k формула для $\bar{x}$ набуває наступного вигляду:

$$\bar{x} = \sum_k x_k * F_k \quad (7)$$

Таким чином, **середнє $\bar{x}$ - це зважена сума всіх різних отриманих значень x_k** , тобто коли кожне значення x_k перемножується на частоту F_k , з якою воно реалізується.

У виразі (7) припустимо, що $\sum_k F_k = 1$ (8)

тобто, якщо скласти частоти F_k всіх можливих значень x_k , то повинні отримати 1. Тоді говорять, що якщо сума будь-якого набору чисел дорівнює 1, то ці числа **нормовані**. Тому вираз (8) називають умовою нормування.

Тоді результати проведених вимірювань можна надати в такому вигляді:

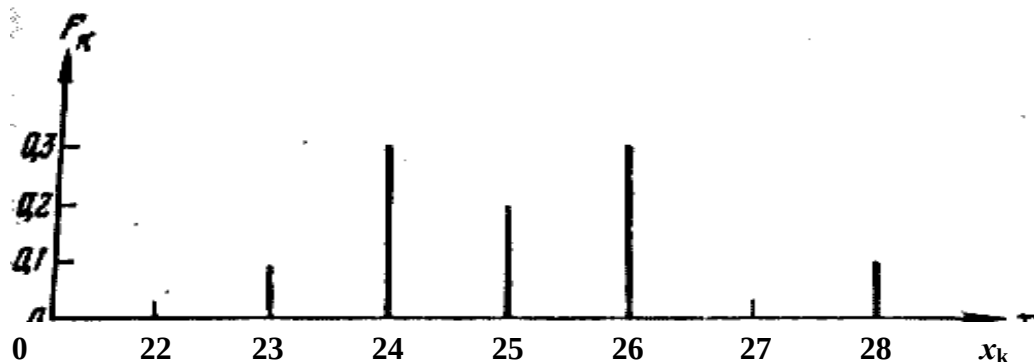


Рис. 1 Гістограма результатів десяти вимірювань довжини x

Гістограма, наведена на рис.1 може бути названа гістограмою для дискретної величини, тому що розподіл результатів показано висотою вертикальних стовпчиків над дискретними значеннями x_k .

Але, в більшості випадків результати вимірювань не можуть бути представлені цілими числами, тому що **більшість фізичних величин мають безперервний діапазон можливих значень**.

Наприклад:

26,4 23,9 25,1 24,6 22,7 23,8 25,1 23,9 25,3 25,4 (9)

Якщо побудувати гістограму для цих десяти значень, то вона складалася б із 10 окремих вертикальних стовпчиків однакової висоти і вміщувала б незначну кількість інформації.

В цьому випадку **діапазон** можливих значень раціонально розбити на необхідне число інтервалів (або "бінів").

Бін	22-23	23-24	24-25	25-26	26-27	27-28
Число замірів в "біні"	1	3	1	4	1	0

* Якщо результат потрапляє точно на границю, то необхідно половину результату віднести до одного біна, а іншу – до другого.



Рис. 2 Гістограма для безперервної змінної величини

Гістограма для безперервної змінної величини показує долю вимірювань x , яка потрапляє в біни від значень 22 до 23, від 23 до 24 і т.п.

Площа прямокутника над кожним інтервалом дорівнює долі вимірювань, які потрапляють в цей інтервал. Таким чином, якщо площа заштрихованого прямокутника дорівнює **0.3**, то це означає, що 3/10 всіх вимірювань знаходяться між 23 і 24.

Висота прямокутника f_k над біном вибирається таким чином, щоб площа $f_k * \Delta_k$ дорівнювала

$$f_k * \Delta_k = \text{доля вимірювань в } k\text{-му біні.}$$

Іншими словами, у випадку гістограми для безперервної величини площа $f_k * \Delta_k$ k -го прямокутника має таке ж призначення, що і висота стовпчиків F_k (рис.1) для випадку гістограми для дискретної величини.

Потрібно зберігати певну обережність під час вибору ширини біна. Якщо біни були вибрані досить широкими, то всі (або майже всі) вимірювання потраплять в один бін і гістограма перетвориться в малоцікавий один прямокутник. Якщо ж біни вибрати дуже вузькими, то дуже незначна їх кількість буде вміщувати більше ніж один відлік, а сама гістограма буде складатися із великої кількості вузьких прямокутників, причому майже всі ці прямокутники будуть мати однакову висоту. Із збільшенням величини N стає можливим вибрати більш вузькі біни.

2. ГРАНИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

В більшості випадків, якщо за заданої ширини біна збільшувати кількість вимірювань, то гістограма буде приймати певну просту форму.

Для 100 вимірювань на гістограмі вимальовується певний пік і вона стає більш симетричною.

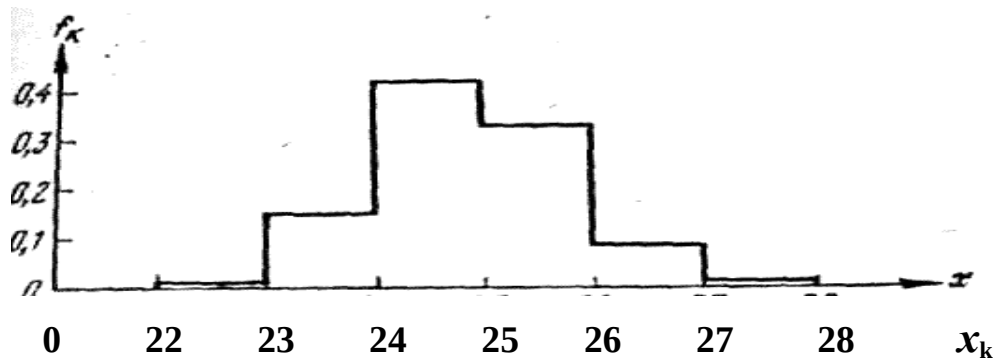


Рис. 3 Гістограма для 100 вимірювань безперервної величини

Після 1000 вимірювань можливо наполовину скоротити ширину біна і гістограма стає більш регулярною і пальною.

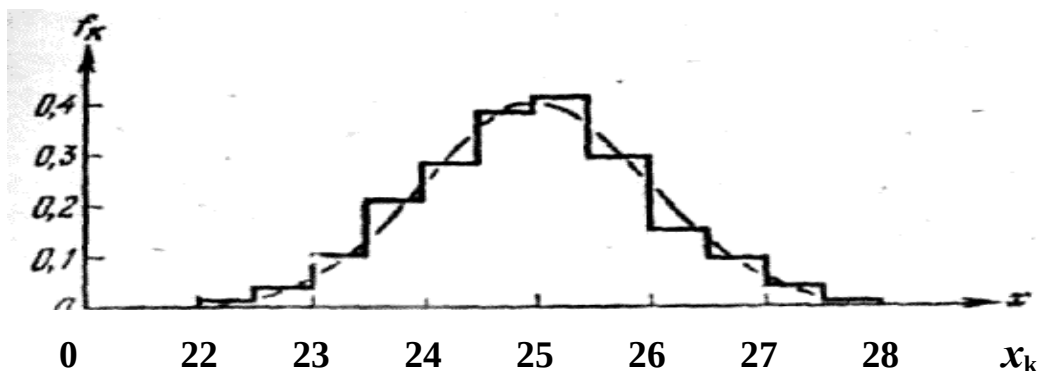


Рис. 4 Гістограма для 1000 вимірювань безперервної величини

Переривиста крива – граничний розподіл.

РЕЗЮМЕ

З ростом числа вимірювань до нескінченності їх розподіл прагне до деякої певної переривистої кривої, яка називається - **граничним розподілом**.

Потрібно зауважити, що **граничний розподіл** – це теоретична ідеалізація, до якої ніколи неможливо абсолютно точно наблизитися на практиці.

І чим більше ми робимо вимірювань, тим ближче наближаємося до **граничного розподілу**.

Граничний розподіл визначає функцію, яку ми позначимо як **$f(x)$** .

Тобто, доля вимірювань, які потрапляють в будь-який малий інтервал від x до $x+dx$ буде дорівнювати площі $f(x) * dx$.

$$f(x) * dx - \text{доля вимірювань, яка потрапляє в інтервал від } x \text{ до } x+dx. \quad (10)$$

В загальному випадку доля вимірювань, яка потрапляє в інтервал між двома значеннями a і b дорівнює площі під кривою між $x=a$ і $x=b$.

Але ця площа є визначений інтеграл від $f(x)$.

Таким чином, ми отримали важливий результат

$$\int_a^b f(x) * dx = \text{доля вимірювань, яка потрапляє в інтервал від } x=a \text{ до } x=b \quad (11)$$

Важливо зрозуміти значення тверджень (10) і (11). Вони обидва визначають долю вимірювань, які, як очікується, будуть розміщуватися всередині певного інтервалу у випадку дуже великого числа вимірювань.

Іншими словами - $f(x)*dX$ - є ймовірність того, що одиничне вимірювання x призведе до результату, що лежить в інтервалі від x до $x+dx$. (12)

Аналогічно: інтеграл $\int_a^b f(x) * dx$ - визначає ймовірність того, що результат будь-якого одиничного вимірювання потрапляє в інтервал від $x=a$ до $x=b$.

Відомо, що повна ймовірність отримання результату, який знаходиться між $-\infty$ і $+\infty$, повинна дорівнювати одиниці, то **граничний розподіл** повинен задовольняти умові: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) * dx = 1$. (13)

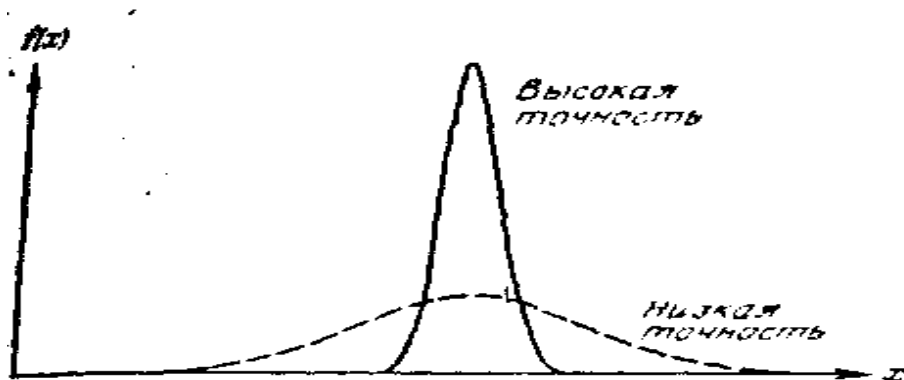
Ця рівність (13) - повний аналог умови нормування (8), коли $\sum_k F_k = 1$.

Тому функція $f(x)$ - **нормована**.

Інтервал $-\infty$; $+\infty$ - умовний, він на практиці має реальне обмеження (22-28, наприклад).

Значення $f(x)$ за межами цього інтервалу = **0**, тому немає різниці будуть границі $-\infty$; $+\infty$ або (22-28).

В залежності від точності вимірювань змінюється і вигляд кривої **граничного розподілу**.



Якщо проводяться дуже точні вимірювання, то всі отримані результати будуть близькі до дійсного значення x , і тому гістограма результатів і, звичайно, **граничного розподілу** будуть виглядати як гострі піки або як суцільна крива на малюнку. З низькою точністю вимірювань – все навпаки (переривиста крива).

Граничний розподіл $f(x)$ у випадку вимірювання даної величини x з допомогою певної апаратури завбачає, яким був би розподіл результатів після багатократних вимірювань.

Таким чином, якщо знати $f(x)$, можливо розрахувати **середнє значення** $\bar{x}$.

Із виразу (7) видно, що середнє будь-якого числа вимірювань – це сума всіх різних значень x_k , які перемножені на ваговий співмножник

$$\bar{x} = \sum_k x_k * F_k \quad (14)$$

В даному випадку у нас є безмежна кількість вимірювань з розподілом $f(x)$. Якщо ми розділимо весь інтервал значень на малі інтервали від x_k до x_k+dx , то доля значень, які потраплять в кожний такий інтервал буде $F_k = f(x_k) * dx_k$ і за умови, коли в ∞ всі інтервали $\rightarrow 0$, формула (14) матиме вигляд

Формула для
$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x) \cdot dx \quad (15)$$

Ця формула визначає $\bar{x}$ за незчисленно великої кількості вимірювань.

Аналогічно ми можемо розрахувати стандартне відхилення σ_x^2 , яке отримане після великої кількості вимірювань. Оскільки ми розглядаємо випадок, коли $N \rightarrow \infty$, то все рівно яку формулу ми тут використаємо з N чи $N-1$. Таким чином **формула для σ_x^2 :**

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) \cdot dx. \quad (16)$$

3. НОРМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Різні види вимірювань мають різні **граничні розподіли**.

Не всі **граничні розподіли** мають вигляд симетричного колокола (дзвону) (наприклад, біноміальний розподіл, розподіл Пуассона зазвичай не симетричні).

Але, все-таки, виявляється, що велика кількість вимірювань мають в якості граничного розподілу **симетричну колоколоподібну (дзвоноподібну) криву**.

Якщо вимірювання, які ми проводимо, піддаються **значним систематичним похибкам**, то ми не можемо очікувати, що граничний розподіл буде мати центр, який співпадає зі справжнім значенням.

Разом з тим, випадкові похибки з рівною ймовірністю зміщують наші величини в обидва боки від істинного значення.

Якщо всі похибки випадкові, то після багатократних вимірювань буде отримано багаторазове як перевищення істинного значення, так і недосагнення його.

Що таке істинне значення?

Його фактично неможливо виміряти, але ми будемо вважати, що воно є (в ідеалі). **Істинним значенням** можна вважати таке значення, до якого ми наближуємося по мірі проведення все більшої кількості вимірювань, які виконуються дуже ретельно.

Таким чином, **істинне значення** – є **ідеалізація**, яка аналогічна поняттю математичної точки, яка не має розмірів, або лінії, яка не має ширини.

Ми будемо позначати істинне значення вимірюваних величин $x, y, \dots$ відповідними прописними буквами $X, Y, \dots$

Якщо вимірювана величина x піддається безлічі незначних випадкових похибок і якщо систематичні похибки назначимо малі, то розподіл результатів вимірювань буде мати вигляд симетричної **колоколоподібної (дзвоноподібної) кривої** з центром, який буде відповідати **істинному значенню X** .

В математиці функція, графік якої має форму **колоколоподібної (дзвоноподібної) кривої**, називається **функцією нормального розподілу**, або функцією Гауса.

Основна форма подання цієї функції : $e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$; (17)

де σ - фіксований параметр, який ми будемо називати параметром ширини, або шириною.

Властивості функції:

за $x=0$ функція $=1$;

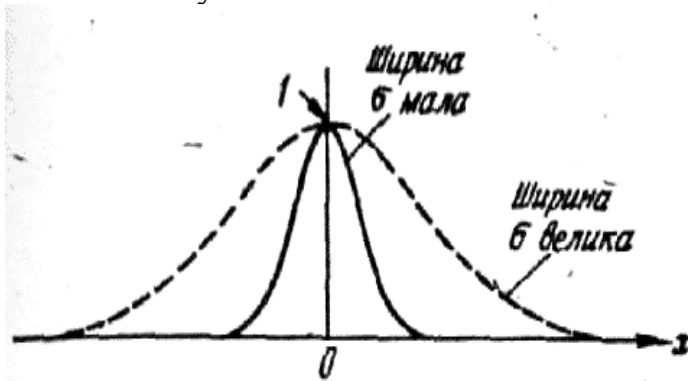
Функція симетрична відносно $x=0$, тому що вона має одні і ті ж значення як для x , так і для $-x$.

За віддалення x від нуля в будь-якому напрямку функція $\frac{x^2}{2\sigma^2}$ зростає,

причому зростає швидко за **σ** мале і більш повільно – коли **σ** велике.

Таким чином, в міру віддалення x від нуля функція $e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$ теж наближається до нуля. Отже, загальний вигляд функції Гауса (17) буде таким, як його надано на

рис. (нижче за текстом). Такий вид графіка пояснює термін «параметр ширини» для σ , оскільки за великих значень σ «колокол» функції виглядає широким, а за малих σ – вузьким.



Щоб отримати колоколоподібну (дзвоноподібну) криву з центром в будь-якій іншій точці $x=X$, потрібно замінити $x \rightarrow x - X$:

$$e^{\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}}; \quad (18)$$

Таким чином, функція досягає максимуму за $x=X$.

Оскільки розподіл повинен бути нормованим, тобто задовольняти умові:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = 1; \quad (19)$$

Для того, щоб виконувалась ця умова, введемо: $f(x) = N \cdot e^{\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}}$; (20)
(множення на N не змінює ні форми, ні положення максимуму за $x=X$).

Тепер нам потрібно вибрати нормувальний множник N таким чином, щоб $f(x)$ була нормована у відповідності з (19).

Для цього необхідно зробити підстановку підінтегрального виразу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{\infty} N \cdot e^{\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx; \quad (21)$$

За оцінки інтегралів такого виду завжди потрібно провести заміну перемінних, щоб спростити підінтегральний вираз.

Позначимо: $x-X=y$; (в цьому випадку: $dx = dy$;) і отримаємо $= N \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2\sigma^2}} \cdot dy$; (22)

Потім ми позначимо: $y/\sigma=z$; (в цьому випадку $dy=\sigma \cdot dz$) і тоді: $= N \int_{-\infty}^{\infty} \sigma \cdot e^{\frac{-z^2}{2}} \cdot dz$.
(23)

Отриманий інтеграл – один із стандартних інтегралів математичної фізики, тоді наведемо тільки результат: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} \cdot dz = \sqrt{2\pi}$. (24)

Відповідно: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = N \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}$.

Виходячи з того, що інтеграл повинен $=1$, нормувальний множник потрібно вибрати таким чином, щоб $N=1/(\sigma \cdot \sqrt{2\pi})$.

Ми прийшли до висновку, що **нормована функція Гауса, або нормована функція нормального розподілу** має вид:

$$f_{x,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}; \quad (25)$$

Потрібно звернути увагу на те, що ми добавили нижні індекси x, σ функції $f_{x, \sigma}(x)$ для того, щоб вказати центр і ширину розподілу.

Функція $f_{x, \sigma}(x)$ описує граничний розподіл результатів вимірювань величини x , істинним значенням якої є X і на яку впливають лише випадкові похибки.

$$\text{Із виразу (15) даної лекції ми маємо, що } \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x) \cdot dx \quad (26)$$

для випадку дуже великої кількості вимірювань. Тоді, якщо граничний розподіл є розподілом Гауса, $f_{x, \sigma}(x)$ з центром в істинному значенні X , то такий інтеграл можливо розрахувати.

Але попередньо, потрібно відмітити, що майже очевидним є те, що **середнє значення $\bar{x}$ у випадку великої кількості вимірювань буде дорівнювати X** , тому що в результаті симетрії функції Гауса відносно X однакове число вимірювань виявиться як більшими за X на якесь значення, так і меншими за нього на те ж значення.

Ми можемо розрахувати інтеграл (26) таким чином

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x) \cdot dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x * e^{-(x-X)^2 / 2\sigma^2} \cdot dx \quad (27)$$

Якщо провести заміну перемінних $y = x - X$, то отримаємо $dx = dy$ і $x = y + X$.

В цьому випадку інтеграл (27) можна розбити на два

$$\bar{x} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} y * e^{-(x-X)^2 / 2\sigma^2} \cdot dy + X * \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-X)^2 / 2\sigma^2} \cdot dy \right) \quad (28)$$

Перший інтеграл в цьому виразі дорівнює нулю, тому що вклад будь-якої точки y точно компенсується вкладом точки $-y$. А другий інтеграл – нормований інтеграл типу (22), який $= \sigma * \sqrt{2\pi}$. Це значення скорочується із знаменником і отримаємо

$$\bar{x} = X \quad (29)$$

для випадку безмежної кількості вимірювань.

Тобто, якщо **результати вимірювань розподілені у відповідності з розподілом Гауса $f_{x, \sigma}(x)$** , то у випадку безмежної кількості вимірювань **середнє значення $\bar{x}$ буде дорівнювати істинному значенню X** , яке відповідає **центру функції Гауса**.

Іншою цікавою величиною, яку можливо розрахувати, є **стандартне відхилення** σ_x . У відповідності до (16) воно визначається

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) \cdot dx \quad (30)$$

Цей інтеграл легко розрахувати, якщо замінити $\bar{x}$ на X , виконуючи підстановку $x - X = y$ та $y/\sigma = z$ і, нарешті інтегруючи по частинах, отримуємо (аналогічно з попередньою задачею)

$$\sigma_x^2 = \sigma_x \quad (31)$$

для випадку безмежної кількості вимірювань.

Іншими словами, параметр ширини σ функції Гауса $f_{x,\sigma}(x)$ є просто **стандартне відхилення**, яке ми отримали б в результаті проведення безмежної кількості вимірювань.

Це, зазвичай, пояснює, чому величина σ була нами використана як параметр ширини і чому σ часто називають стандартним відхиленням Гауса $f_{x,\sigma}(x)$.

Рекомендована література

1. Корбутяк В.І. Методологія системного підходу та наукових досліджень: Навч. посібник / В.І. Корбутяк. – Рівне: НУВГП, 2010. – 176с.
2. Крушельницька О.В. Методологія та організація наукових досліджень: навч. посібник. К.: Кондор, 2006. 206 с.
3. Клименюк О.В. Методологія та методи наукового дослідження: Навчальний посібник. К.: Міленіум, 2005. 186 с.
4. Шейко В., Кушнарєнко Н. Організація та методика науково-дослідницької діяльності: Підручник. –К.: Знання –Прес, 2003. –295 с.
5. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 272 с.

ЛЕКЦІЯ № 5 " Проблема відсіювання та об'єднання результатів вимірювань "

План лекції:

1. Проблема відсіювання даних;
2. Критерій Шовене;
3. Проблема об'єднання результатів різних вимірювань.

ВСТУП до Лекції.

І, нарешті, ми в даній лекції розглянемо питання, пов'язане з проблемою, коли потрібно вирішувати, що робити з **результатом вимірювання, який здається до такого ступеня нерозумним, що більше схожий на помилку (промах)?**

Розглянемо також проблему об'єднання результатів двох або більше окремих і незалежних вимірювань однієї і тієї ж фізичної величини.

Ми покажемо, що найкращою оцінкою цієї величини, оснований на декількох вимірюваннях, буде відповідне зважене середнє цих вимірювань.

1. ПРОБЛЕМА ВІДСІЮВАННЯ ДАНИХ

Часто виникає делікатне питання: **відкидати чи ні** результат (результати) вимірювань, який здається до такої ступені нерозумним. що більше схожий на помилку?

Наприклад: (заміри періоду коливання маятника, сек)

3,8; 3,5; 3,9; 3,9; 3,4; **1,8**. (4)

1,8 – значно вирізняється від інших значень.

Із попередніх лекцій нам відомо, що результат нормального вимірювання може значно вирізнятися від результатів інших вимірювань тієї ж самої величини. Разом з тим, у звичайній обстановці така велика різниця як в (4), дуже неймовірна, тому ми можемо підозрювати, що час **1,8 с** є результатом якоїсь непоміченої помилки.

Якщо була допущена якась явна помилка, то результат **1,8** необхідно відкинути. Це може бути:

- помилка в процесі зчитування цього останнього значення;
- секундомір зупинився під час останнього вимірювання;
- був використаний інший секундомір.

На жаль, часто ми не можемо визначити якусь явну причину.

Відсіювання (відкидання) даних – спірне питання, з якого у спеціалістів немає єдиної думки.

Але, разом з тим, це **важливе питання**. Адже в нашому випадку найкраща оцінка періоду коливання маятника залежить від того, відкинемо ми підозрюємо значення **1,8 с**, адже **середнє 6 вимірювань = 3,4 с**, в то й час як **середнє 5 вимірювань = 3,7 с**, що значно вирізняється.

Крім того, рішення відкинути будь-які дані в кінцевому результаті завжди суб'єктивне. Спеціаліста, який прийняв таке рішення можна запідозрити в "підтасуванні" даних.

Разом з тим ситуація ускладнюється, якщо врахувати ймовірність того, що аномальний результат може відображати деякі важливі ефекти. Справді, **багато важливих наукових відкриттів спочатку виглядали як аномальні результати вимірювань, які, швидше за все, були схожі на помилки.**

Тоді необхідно використати наші знання з теорії нормального розподілу Гауса.

Якщо взяти **6 вимірювань**, то $\bar{x} = 3,4$ сек., а якщо – 5, то $\bar{x} = 3,7$ сек.

Необхідно в даному випадку використати певний критерій, який допоможе вирішити: відкидати чи залишати аномальний результат вимірювання?

2. КРИТЕРІЙ ШОВЕНЕ

Якщо повернутися до **6 вимірювань**, тобто з врахуванням значення **1,8 сек**, то

$$\bar{x} = 3,4 \text{ сек.} \quad (5)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})^2} = 0,8 \text{ сек.} \quad (6)$$

Значення **1,8** вирізняється від $\bar{x} = 3,4$ на **1,6**, тобто на 2σ .

Якщо ми припустимо, що результат вимірювань підпорядковується розподілу Гауса з центром $\bar{x}$ і шириною σ , то ми можемо вирахувати ймовірність отримання результатів, які, в крайньому випадку, так же сильно вирізняються від середнього :

$$P(\text{за межами } 2\sigma_x) = 1 - P(\text{в межах } 2\sigma_x): P = 1 - 0,95; P = 0,05 (5\%).$$

Тобто, допускаючи, що значення (5) і (6) для $\bar{x}$ і σ_x справедливі, то тільки 5 із 100 або один результат із 20 може вирізнитися від середнього так же сильно, як вирізняється число **1,8 с**.

Тобто, провівши 20 і більше вимірювань, ми, дійсно, повинні були б очікувати появу одного або двох результатів настільки відмінних, як і **1,8 с**. і тоді не було б необхідності їх відкидати.

Але ми провели всього **6** вимірювань, тому очікуване число результатів, настільки відмінних, як і **1,8** с. в дійсності дорівнює: **0,05*6=0,3** (тобто **менше 1 результату**).

Таким чином, для шести вимірювань ймовірність того, що хоча би одне із них буде настільки поганим, як і **1,8** – дорівнює **0,3** вимірювань.

Вибір цієї межі, починаючи з якої результат стає "до смішного неймовірним" робиться експериментатором.

Критерій Шовене, в його звичному ствердженні, показує, що очікуване число вимірювань, настільки відмінних, як число, що потрапляє під підозру, **повинно бути $< 1/2$** .

Таким чином, значення **1,8** (згідно з критерієм Шовене) може бути відкинуте.

Тепер ми можемо описати **використання критерію Шовене до загальної задачі**.

Припустимо, що ми робимо N вимірювань

$$x_1, x_2, \dots, x_N$$

однієї і тієї ж величини x . Враховуючи, всі N вимірювань, ми розраховуємо $\bar{x}$ і σ_x . Якщо один із результатів вимірювань вирізняється від $\bar{x}$ настільки, що здається підозрілим (позначимо його як $x_{\text{підозр.}}$), то ми спочатку розраховуємо

$$t_{\text{підозр.}} = \frac{|x_{\text{підозр.}} - \bar{x}|}{\sigma_x} \quad (7)$$

число стандартних відхилень, на які $x_{\text{підозр.}}$ вирізняється від $\bar{x}$. Потім ми знаходимо із таблиць ймовірність P (за межами $t_{\text{підозр.}} \sigma_x$) того, що нормальні вимірювання будуть вирізнятися від $\bar{x}$ на $t_{\text{підозр.}}$ або більше стандартних відхилень.

Нарешті, ми множимо на N повне число вимірювань, щоб отримати

$$n(\text{гірше, ніж } x_{\text{підозр.}}) = N P(\text{за межами } t_{\text{підозр.}} \sigma_x).$$

Отримане значення n – число очікуваних вимірювань, які дають настільки погані результати, як і $x_{\text{підозр.}}$.

Якщо $n < 1/2$, то $x_{\text{підозр.}}$ не задовольняє критерію Шовене і відкидається.

Після відсіювання результатів потрібно перерахувати $\bar{x}$ і σ_x і порівняти з попередніми значення.

Може таке трапитися, що з новим значенням σ_x деякі інші результати вимірювань не будуть задовольняти критерію Шовене, але більшість

авторитетних спеціалістів вважають, що **критерій Шовене не повинен використовуватися повторно.**

Розглянемо це один приклад (з використанням виведених нами формул)

Проведено 10 вимірювань однієї і тієї ж довжини x (в мм):

46, 48, 44, 38, 45, 47, **58**, 44, 45, 43.

Видно, що значення **58** виглядає аномально більшим. Тому ми будемо використовувати критерій Шовене.

Розраховуємо $\bar{x} = 45,8$ та $\sigma_x = 5,1$.

Різниця між $x_{\text{підозр.}}=58$ і $\bar{x} = 45,8$ дорівнює 12,2 або 2,4 стандартних відхилення, тобто
$$\frac{|x_{\text{підозр.}} - \bar{x}|}{\sigma_x} = \frac{|58 - 45,8|}{5,1} = 2,4.$$

Із таблиці знаходимо ймовірність того, що результат буде вирізнятися від $\bar{x}$ на $2,4\sigma_x$ або більше дорівнює

$P(\text{за межами } 2,4\sigma_x) = 1 - P(\text{в межах } 2,4\sigma_x) = 1 - 0,984 = 0,016.$

Тобто, для 10 вимірювань ми могли б отримати тільки 0,16 випадків такого поганого вимірювання, як результат **58**.

Зважаючи, що це число $< 1/2$, то можемо, в крайньому випадку, розглянути можливість відсіювання цього результату.

Якщо буде прийняте рішення про відкидання **58**, то повинні перерахувати $\bar{x} = 44,4$ та $\sigma_x = 2,9$.

Як видно, середнє змінилося незначно, а σ_x помітно зменшилося.

3. ПРОБЛЕМА ОБ'ЄДНАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РІЗНИХ ВИМІРЮВАНЬ

Часто буває так, що **одна фізична величина вимірюється декілька разів, можливо, навіть, в декількох незалежних лабораторіях.**

І тоді виникає питання, як поєднати ці результати, щоб отримати єдину найкращу оцінку.

Припустимо, що два експериментатори А і Б ретельно вимірюють величину x і отримали такі результати:

Експериментатор А : $x = x_A \pm \sigma_A$; (8)

Експериментатор Б : $x = x_B \pm \sigma_B$; (9)

Кожен із цих результатів, ймовірно, і сам по собі є наслідком декількох вимірювань. Наприклад, x_A може бути середнім всіх вимірювань експериментатора А, а σ_A - стандартним відхиленням цього середнього (аналогічно для x_B і σ_B).

Стоїть питання, як краще об'єднати x_A і x_B , щоб отримати єдину найкращу оцінку.

Перш ніж відповісти на це запитання, відмітимо, наступне:

1). Якщо різниця $|x_A - x_B|$ набагато більше, ніж σ_A або σ_B , то щось не так, в крайньому випадку, з одним із вимірювань. В такій ситуації два варіанти вимірювань суперечливі і потрібно ретельно проаналізувати обидва вимірювання, щоб перевірити чи не зазнає одне із них впливу невиявлених систематичних похибок.

2). Припустимо, разом з тим, що обидва вимірювання (8) і (9) несуперечливі, тобто різниця $|x_A - x_B|$ не на багато більша, ніж будь-яка із похибок σ_A і σ_B .

В нашому випадку визначення кращої оцінки об'єднаних вимірювань першим наміром було б розрахувати її як $|x_A - x_B|/2$. Але такий шлях не оправданий, якщо дві похибки σ_A і σ_B не рівні. Розрахунок простого середнього $|x_A - x_B|/2$ робить два вимірювання однаково важливими, хоча **більш точним вимірюванням** необхідно було приписати **більшу вагу**.

4.1 ЗВАЖЕНЕ СЕРЕДНЄ

Ми легко можемо вирішити нашу задачу використовуючи **принцип максимальної правдоподібності**, як це ми робили раніше в наших лекціях.

Якщо зважити на те, що результати обох вимірювань підпорядковуються розподілу Гауса, і позначити невідоме істинне значення величини x через X , то ймовірність того, що експериментатор А отримає своє значення x_A дорівнює:

$$P_x(x_A) \sim \frac{1}{\sigma_A} * e^{-(x_A - X)^2 / 2\sigma_A^2} \quad (10)$$

а ймовірність того, що експериментатор Б отримає своє значення x_B дорівнює:

$$P_x(x_B) \sim \frac{1}{\sigma_B} * e^{-(x_B - X)^2 / 2\sigma_B^2} \quad (11)$$

Ймовірність того, що експериментатор А отримає значення x_A , а разом з тим, експериментатор Б - значення x_B , дорівнює добутку двох ймовірностей:

$$P_x(x_A, x_B) = P_x(x_A) * P_x(x_B) \sim \frac{1}{\sigma_A * \sigma_B} * e^{-\chi^2 / 2} \quad (12)$$

де ми ввели зручне коротке позначення χ^2 для показника

$$\chi^2 = \frac{(x_A - X)^2}{\sigma_A^2} + \frac{(x_B - X)^2}{\sigma_B^2} \quad (13)$$

Ця важлива величина являє собою суму квадратів відхилень від X результатів двох вимірювань, розділених на відповідні похибки. Її інколи називають "**сумою квадратів**".

Принцип **максимальної правдоподібності** стверджує, що найкращою оцінкою для невідомого істинного значення X буде таке значення, для якого фактично отримані величини x_A і x_B найбільш ймовірні. Іншими словами, найкращою оцінкою для X буде значення, за якого ймовірність (12) досягає максимуму, або, що є еквівалентним, показник χ^2 мінімальний.

Таким чином, щоб визначити найкращу оцінку, ми просто продефініціюємо (13) по X і прирівняємо похідну до нуля

$$2 * \frac{x_A - X}{\sigma_A^2} + 2 * \frac{x_B - X}{\sigma_B^2} = 0$$

Рішення цього рівняння відносно X є найкраща оцінка $x_{\text{найкр.}}$ і вона дорівнює:

$$x_{\text{найкр.}} = \left(\frac{x_A}{\sigma_A^2} + \frac{x_B}{\sigma_B^2} \right) / \left(\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_B^2} \right) \quad (14)$$

$$\text{або} \quad x_{\text{найкр.}} = \frac{\omega_A \cdot x_A + \omega_B \cdot x_B}{\omega_A + \omega_B}; \quad (15)$$

$$\text{де:} \quad \omega_A = \frac{1}{\sigma_A^2}; \omega_B = \frac{1}{\sigma_B^2}; \quad (16)$$

Якщо два вимірювання однаково точні ($\sigma_A = \sigma_B$), то наша відповідь зводиться до простого середнього $|x_A - x_B|/2$.

Висновок: чим більше σ^2 , тим менший її внесок в загальну похибку і тим ближче $x_{\text{найкр.}}$ до більш точного значення.

Для n –вимірювань: $x_1 \pm \sigma_1; x_2 \pm \sigma_2; \dots, x_n \pm \sigma_n$;

$$x_{\text{найкр.}} = \frac{\sum_{i=1}^N \omega_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^N \omega_i}; \quad \sigma_{x_{\text{найкр.}}} = \left(\sum_{i=1}^N \omega_i \right)^{-1/2} - \text{загальна похибка, оскільки } \omega_i = \frac{1}{\sigma_i^2}.$$

Приклад.

Три експериментатори провели вимірювання:

$$R_1 = 11 \pm 1; R_2 = 12 \pm 1; R_3 = 10 \pm 3; R_{\text{найкр.}} = \frac{\sum_{i=1}^N \omega_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^N \omega_i};$$

$$\omega_1 = \frac{1}{1^2} = 1; \omega_2 = \frac{1}{1^2} = 1; \omega_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9};$$

$$R_{\text{найкр.}} = \frac{(1 \cdot 11) + (1 \cdot 12) + (\frac{1}{9} \cdot 10)}{1 + 1 + \frac{1}{9}} = 11,42 \text{ ом};$$

$$\text{Загальна похибка результату: } \sigma_{x_{\text{вс.}}} = \left(\sum_{i=1}^N \omega_i \right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+1+\frac{1}{9}}} = 0,69.$$

$$R = (11,4 \pm 0,7) \text{ ом.}$$

Цікаво прослідкувати, яку б відповідь ми отримали б, якби ми повністю проігнорували результатами третього експериментатора, які в три рази менш точні, і, відповідно, в 9 разів менш важливі.

В цьому випадку простий розрахунок дає $R_{\text{найкр.}} = 11,50$ (в порівнянні з 11,42) з похибкою 0,71 (в порівнянні з 0,69). Очевидно, третє вимірювання не має великого значення.

Рекомендована література

1. Корбутяк В.І. Методологія системного підходу та наукових досліджень: Навч. посібник / В.І. Корбутяк. – Рівне: НУВГП, 2010. – 176с.
2. Крушельницька О.В. Методологія та організація наукових досліджень: навч. посібник. К.: Кондор, 2006. 206 с.
3. Клименюк О.В. Методологія та методи наукового дослідження: Навчальний посібник. К.: Міленіум, 2005. 186 с.
4. Шейко В., Кушнарєнко Н. Організація та методика науково-дослідницької діяльності: Підручник. –К.: Знання –Прес, 2003. –295 с.
5. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 272 с.

ЛЕКЦІЯ № 6 ІНФОРМАТИВНІСТЬ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ "

План лекції:

1. Поняття інформативності досліджуваного об'єкта;
2. Класичний підхід до дослідження невідомого об'єкта;
3. Планування експериментальних досліджень (класичне);
4. Планування експериментальних досліджень за використання критеріїв інформативності.

1. ПОНЯТТЯ ІНФОРМАТИВНОСТІ ДОСЛІДЖУВАНОГО ОБ'ЄКТА

Щоб пізнати об'єкт (дізнатися про комплекс його властивостей), потрібно його дослідити, а саме: **провести експериментальні дослідження** та зафіксувати результати цих досліджень на носіях інформації з метою порівняти нашій рівень пізнання об'єкта з існуючим.

Потрібно для себе усвідомити, що впливовими величинами, які здатні змінювати стан і властивості досліджуваного об'єкта, є фактори.

В ході проведення експериментальних досліджень ми фіксуємо стан (одну із властивостей) досліджуваного об'єкта за допомогою відгуку досліджуваного об'єкта. Цю величину ми будемо називати функцією відгуку або ***параметром оптимізації***.

Досліджуваний об'єкт по-різному реагує на зміну факторів (одного або декількох одночасно) і таким чином проявляє свій комплекс властивостей.

Задача, яка стоїть перед дослідником – це так спланувати експеримент, щоб об'єкт під час його дослідження максимально проявив весь свій комплекс властивостей.

Таким чином, **інформативність експерименту – це не що інше, як здатність досліджуваного об'єкта надати максимальну інформацію про можливу кількість різних своїх станів (властивостей), незалежно від внутрішньої структури досліджуваного об'єкта** (яку ми з часом зможемо виражати моделлю), а також впливовості тих або інших факторів, і таким чином **забезпечити максимальну достовірність результатів експериментальних досліджень в умовах випадкових "шумових" переешкод.**

Тому перед експериментатором стоїть задача знайти шляхи для отримання максимальної інформації стосовно досліджуваного об'єкта.

2. Класичний підхід до дослідження невідомого об'єкта

Класичним (не тому що він є класикою, а тому, що його в основному використовують) вважається підхід до проведення експериментальних досліджень, за якого стан досліджуваного об'єкта (а, відповідно і інформативність) поступово змінюється і фіксується під впливом лише одного із факторів, що були відібрані експериментатором в якості впливових. Зміна кожного із факторів відбувається по черзі (на фоні зафіксованих значень інших факторів).

Деякі експериментатори вважають, що таким чином легше прослідкувати, як змінюється відгук досліджуваного об'єкта і зафіксувати надану інформацію у вигляді графіків (діаграм).

Але такий підхід до добування інформації стосовно досліджуваного об'єкта багато в чому хибний.

Зобразимо графічно послідовність вивчення поверхні. наприклад, другого порядку під час почергового фіксування факторів.

На мал. 1 наведена залежність параметра оптимізації (вихід продукту) від фактору X_1 за фіксованого значення фактора X_2 .

З мал. 1 видно, що максимальне значення параметра оптимізації відповідає значенню X_1 рівному x_{13} . Фіксуємо фактор X_1 на рівні x_{13} і вивчаємо вплив фактору X_2 (мал. 2, крива x_{13}).

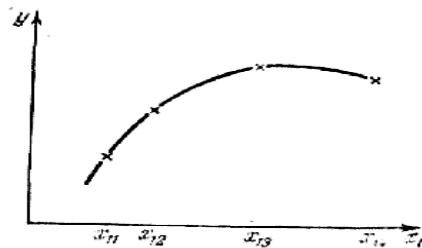


Рис. 1 Залежність параметра оптимізації від фактора X_1 за фіксованого значення фактора X_2 .

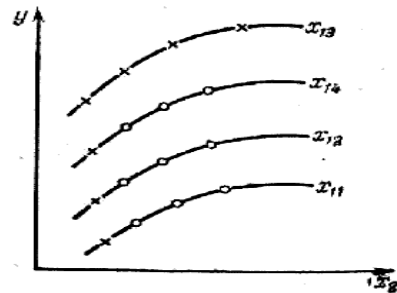


Рис. 2 Залежність параметра оптимізації від фактора X_2 за чотирьох рівнів фіксації значення фактора X_1 .

Потім наносимо на мал. 2 дані з мал. 1, у результаті чого з'являються ще 3 точки (на кривих x_{14} , x_{12} і x_{11} вони відзначені хрестиками). Вийшло всього сім точок, позначених хрестиками. Чи досить це для опису вивченої системи? Звичайно ні, тому що є ще досить велика невивчена область.

Для повного дослідження всієї області, в якій змінюються два фактори, потрібно додати точки, що позначені кружками, тобто поставити експерименти в шістнадцятьох точках. Для трьохфакторної задачі буде потрібно 64 точки і т.д.

Таким чином: перевага лише умовна – це **наглядність у вигляді графіків** (діаграм).

Недоліки: дослідів потрібно проводити багато, інформативність дуже низька і немає гарантії в тому, що за зміни співвідношення рівнів факторів закономірності зміни функції відгуку досліджуваного об'єкта, досягнуті попередньо, збережуться.

3. ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ (КЛАСИЧНЕ)

Позбутися одного із недоліків до проведення експериментальних досліджень з використанням методу, який ми (умовно) назвали класичним, а саме: непомірно великої кількості експериментальних точок, можливо за впровадження планування експериментальних досліджень.

Після виходу у світ робіт Бокса і Вільсона, Бокса і Хантера та ін. (у 50-х роках XX ст.) намітилася можливість створення нового напрямку - **статистичного планування експериментів**. Цій темі та цьому напрямку експериментальних досліджень у нас буде присвячено декілька лекцій. На даний момент нас цікавить поняття інформативності експериментальних досліджень, а саме: як вона зміниться за такого підходу до проведення експериментальних досліджень.

Як ми переконаємося в наступних лекціях, в **основі методів статистичного планування експериментів лежить використання впорядкованого або планового розташування точок у факторному просторі і перехід до нової системи координат**.

Використання статистичних планів дає дослідникові можливість **значно підвищити ефективність експерименту**.

Головною перевагою такого підходу є **значне скорочення кількості експериментальних точок** під час вивчення досліджуваного об'єкта.

Як ми переконаємося із наступних лекцій, всі досліджувані фактори змінюються одночасно, але за певним планом.

За рахунок переходу до нової (безрозмірної) системи координат всі фактори змінюються на двох рівнях (+1 і -1) і всі фактори стають рівноправними всередині досліджуваної області (тобто це дає **можливість** (після побудови математичної моделі) **на підставі величин і знаків коефіцієнтів моделі судити про їхню роль в процесі**).

Матриця планування для прикладу для двох факторів (разом з результатами експериментів) має вигляд, наданий в табл. 1.

Таблиця 1- Матриця планування

№ точки	X_1	X_2	Y
1	+1	-1	Y_1
2	-1	-1	Y_2
3	+1	+1	Y_3
4	-1	+1	Y_4

Побудований таким способом план експериментів має ряд досить цінних властивостей, з якими ми познайомимось пізніше. Як видно із табл.1, кількість

експериментальних точок значно скорочується: для двох факторів достатньо провести всього 4 експерименти, одночасно змінюючи фактори.

Що стосується інформативності, то тут не все так гладко.

Недоліки такого підходу (з точки зору інформативності) до проведення експериментальних досліджень: фактори змінюються лише на двох рівнях (експериментальні точки розміщуються на гранях квадрата, куба і т.д.). **Інформація про внутрішній стан об'єкта відсутня.**

Інші недоліки такого підходу обговоримо в наступному розділі, в якому ми познайомимося з критеріями інформативності експериментальних досліджень.

4. ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ЗА ВИКОРИСТАННЯ КРИТЕРІЇВ ІНФОРМАТИВНОСТІ

Перед тим, як розібратися в суті методу, потрібно розглянути задачу **планування експерименту із загальних позицій.**

Таким чином, в загальному випадку **задача планування оптимального експерименту** являє собою задачу отримання максимальної інформації за витрат, які намагаються бути мінімальними.

$$X(N, M)_{opt} = \{(X \in \mathcal{X}) : I \rightarrow \max; C(X) \rightarrow \min\}, \quad (1)$$

де N – число експериментальних точок;

M – число факторів ;

$\mathcal{X}$ - множина можливих планів експерименту.

Із рівняння (1) випливає, що критерії інформативності і економічності притиріччять один одному: із збільшенням N інформативність експерименту зростає, але, разом з тим, суттєво ростуть і витрати на реалізацію експериментальних точок.

Якщо мова йде про планування експериментальних досліджень, то **інформативність експерименту** – це не що інше, як здатність (в даному випадку) матриці $X(N, M)$ надати інформацію про максимально можливу кількість різних станів об'єкта, який вивчається, незалежно від структури моделі і значимості тих або інших факторів, а також забезпечити максимальну достовірність результатів експерименту в умовах випадкових "шумових" перешкод.

На користь вибраної матриці експерименту вказує той факт, що в математичній теорії експерименту (попередній розділ Лекції) критерії інформативності відсутні, тому **математична теорія експерименту (МТЕ) обмежується лише задачами параметричної ідентифікації**, тобто визначенням коефіцієнтів моделі за заданої структури моделі (переважно лінійна модель).

В МТЕ ми за певними критеріями вирішуємо адекватна чи неадекватна модель, структуру якої ми обрахували (визначили її коефіцієнти).

Під час конструювання матриці $X(N, M)$ необхідно досягти найбільшої інформативності експерименту у випадку, коли оптимальне число дослідів N^* менше за число дослідів N_0 повного факторного експерименту (ПФЕ), тобто $N \leq N^* \leq N_0$ ($N_0 = K^M$, де K – число дискретних значень кожного із факторів).

Як відомо, фактори по-різному впливають на параметр оптимізації. Тому, може виявитися, що фактор за попередніми дослідом був включений до матриці експерименту, але він не виявив суттєвого впливу на вихідний показник.

З цього приводу доцільно вимагати, щоб за викреслювання із матриці будь-якого її стовпця вона знову складалася із N різних строчок (див. табл. 2) **(інформативність матриці повинна залишатися незмінною).**

Таблиця 2

№	X_1	X_2	X_3	Y
1	+	+	+	Y_1
2	-	+	+	Y_2
3	+	-	+	Y_3
4	-	-	+	Y_4
5	+	+	-	Y_5
6	-	+	-	Y_6
7	+	-	-	Y_7
8	-	-	-	Y_8

Якщо X_3 виявиться незначимим (або інший із факторів), інформативність матриці падає в 2 рази (та ще плюс витрати на реалізацію тих точок, що виявилися неінформативними!).

Разом з тим, такої інформації недостатньо для забезпечення вибору оптимальної матриці із множини варіантів, які можливі. В такому випадку необхідно використання додаткових критеріїв для побудови інформативного плану експерименту та значного обмеження області перебору варіантів.

Вказані вимоги можна забезпечити, використовуючи **критерії**:

- максимуму мінімальної міждослідної відстані

$$d_{\min} = \min_{l,k} \left[\sum_{j=1}^M x_{lj} \otimes x_{kj} \right] \rightarrow \max; \quad l, k \in \overline{1, N}; \quad l \neq k, \quad (2)$$

$$\text{де } x_{lj} \otimes x_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{якщо } x_{lj} = x_{kj}; \\ 1 & \text{якщо } x_{lj} \neq x_{kj}; \end{cases}$$

- максимуму евклідової відстані

$$\rho_{\min} = \min_{l,k} \left[\sum_{j=1}^M (x_{lj} - x_{kj})^2 \right]^{1/2} \rightarrow \max \quad (3)$$

Таким чином, критерій $d_{\min}$ у виразі (2) забезпечує максимум ентропійної оцінки, яка розраховується за викреслювання будь-якого стовпця, їх пари, трійки і т.д в матриці експерименту.

Критерій $\rho_{\min}$ у виразі (3) максимізує обхват області експерименту, що також є умовою підвищення його інформативності і сприяє мінімізації дисперсій оцінок коефіцієнтів моделі незалежно від її структури.

Потрібно відмітити, що ефективним є використання критеріїв в послідовності (2) – (3).

В цьому легко переконатися на прикладі двох факторів. Так, використання тільки критерію (3) призводить до того, що експериментальні точки будуть максимально віддалені від центру плану і розміщатися лише на двох рівнях. У випадку, коли один із факторів X_1 або X_2 буде незначимий, можлива втрата 50% інформації. Якщо ж послідовно використати критерії, як показано вище, то **варіювання факторів зростає до 4 рівнів.**

Із наведеного вище опису методики планування експерименту виходить, що **збільшення інформативності експерименту можливе не тільки за рахунок збільшення кількості експериментальних точок, але і завдяки оптимальному розміщенню їх у факторному просторі.**

Для остаточного переконання в перевагах використання критеріїв інформативності наведемо приклади матриць для трьох факторів:

а) класичне планування (на 2-х рівнях: **+1** – верхній рівень; **-1** – нижній рівень);

№	X_1	X_2	X_3	Y
1	+1	+1	+1	Y_1
2	-1	+1	+1	Y_2
3	+1	-1	+1	Y_3
4	-1	-1	+1	Y_4
5	+1	+1	-1	Y_5
6	-1	+1	-1	Y_6
7	+1	-1	-1	Y_7
8	-1	-1	-1	Y_8

Викреслювання одного із рядків (у випадку незначимості одного із факторів) призводить до втрати інформативності.

б) з використанням критеріїв інформативності та шумостійкості (планування на 4-х рівнях + "нульовий" рівень).

В даному випадку трохи інша градація рівнів. Верхній рівень: +4; нижній: +1. А рівні: +2 і +3 – це проміжні рівні варіювання факторів.

Варіант 1-й:

№	X_1	X_2	X_3	Y
1	+3	+1	+1	Y_1
2	+4	0	+3	Y_2
3	+4	+3	+1	Y_3
4	+1	+4	0	Y_4
5	+3	+4	+3	Y_5
6	+1	+1	+4	Y_6
7	0	+3	+4	Y_7
8	0	0	0	Y_8

У відповідності з (2) - $\min d(n,l)=2$, тобто після викреслювання одного із рядків матриці залишається два рядки, в яких точки експерименту не повторюються.

У відповідності з (3) - $\max Ro(n,N)=11$ - точки максимально віддалені одна від одної.

Варіант 2-й:

№	X_1	X_2	X_3	Y
1	+3	0	+3	Y_1
2	+4	+3	+1	Y_2
3	+4	+4	0	Y_3
4	+1	+4	+3	Y_4
5	+3	+1	+4	Y_5
6	+1	+3	+4	Y_6
7	0	+1	+1	Y_7
8	0	0	0	Y_8

У відповідності з (2) - $\min d(n,l)=2$, тобто після викреслювання одного із рядків матриці залишається два рядки, в яких точки експерименту не повторюються.

У відповідності з (3) - $\max Ro(n,N)=2$ - точки максимально сгруповані в центрі плану (у відповідності з вимогами Користувача).

Рекомендована література

1. Корбутяк В.І. Методологія системного підходу та наукових досліджень: Навч. посібник / В.І. Корбутяк. – Рівне: НУВГП, 2010. – 176с.
2. Крушельницька О.В. Методологія та організація наукових досліджень: навч. посібник. К.: Кондор, 2006. 206 с.
3. Клименюк О.В. Методологія та методи наукового дослідження: Навчальний посібник. К.: Міленіум, 2005. 186 с.
4. Шейко В., Кушнарєнко Н. Організація та методика науково-дослідницької діяльності: Підручник. –К.: Знання –Прес, 2003. –295 с.
5. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 272 с.

ЛЕКЦІЯ № 8 "ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В ІНЖЕНЕРНІЙ І НАУКОВІЙ ДІЯЛЬНОСТІ"

План лекції:

1. Поняття математичного моделювання в інженерній і науковій діяльності.

- 1.1 Вимоги до моделей.
- 1.2 Способи побудови моделей та задачі моделювання.
- 1.3 Методи моделювання.
- 1.4 Принципи побудови моделей.
- 1.5 Технологія моделювання.
- 1.6 Системний підхід до побудови моделей.

1.1 Вимоги до моделей

Метою моделювання є здобуття, обробка, представлення і використання інформації про об'єкти, які взаємодіють між собою і зовнішнім середовищем; а модель тут виступає як засіб пізнання властивостей і закономірностей поведінки об'єкту.

Головною і необхідною умовою для переходу від дослідження об'єкта до дослідження моделі і подальшого перенесення результатів на об'єкт дослідження є вимога адекватності моделі і об'єкта.

Таким чином, модель створюється для вирішення конкретних завдань і тому, розробник моделі має бути впевненим, що не отримає абсурдних результатів, а всі отримані результати відображатимуть необхідні для дослідника характеристики та властивості модельованої системи.

У загальному випадку під час побудови моделі потрібно враховувати такі вимоги:

- **змістовність**, тобто здатність моделі відображати істотні риси і властивості реального процесу, який вивчається і моделюється;
- **дедуктивність**, тобто можливість конструктивного використання моделі для отримання результату;
- **індуктивність** – вивчення причин і наслідків, від окремого до загального, з метою накопичення необхідних знань.

Модель повинна дати можливість знайти відповіді на певні запитання, наприклад: «що буде, якщо ...», оскільки вони є найбільш доцільними під час глибокого вивчення проблеми.

Не варто забувати, що системні *аналітики використовують модель для прийняття рішень і пошуку найкращих способів створення модельованої системи або її модернізації.*

Завжди потрібно пам'ятати, що користувачем інформації, отриманої за допомогою моделі, є замовник. Недоцільно розробляти модель, якщо її не можна буде використовувати. Більш того, робота з моделлю має бути автоматизованою для замовника до такого ступеня, щоб він міг працювати з нею в межах своєї предметної області.

Таким чином, між моделлю і користувачем повинен бути розвинутий інтерфейс, який звичайно створюється за допомогою системи меню, налагодженої на застосування моделі в певній галузі.

Ступінь деталізації моделі потрібно вибирати з огляду на цілі моделювання, можливості отримання необхідних вхідних даних для моделі та з урахуванням наявних ресурсів для її створення.

Відсутність кваліфікованих фахівців може звести роботи зі створення моделі нанівець. З іншого боку, чим детальніше розроблено модель, тим вона стійкіша до вхідних впливів, які не були передбачені під час проектування, і на більшу кількість запитань може дати правильні відповіді.

1.2 Способи побудови моделей та задачі моделювання

Моделлю називається *представлення об'єкта, системи чи поняття в деякій абстрактній формі*, що є зручною для наукового дослідження.

В загальному випадку модель має структуру, зображену на рисунку 1.

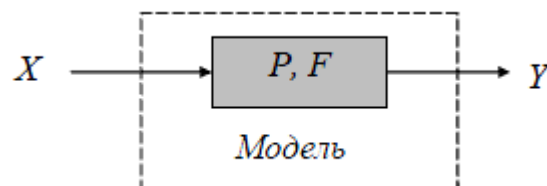


Рис. 1. Загальна структура моделі

Тут X – множина вхідних змінних системи, Y – множина вихідних змінних системи, P – множина параметрів, F – функція, функціонал, алгоритм або формальне представлення залежності змінних Y від змінних X .

Способи побудови моделей

Існують *два способи побудови моделей.*

За першого способу в результаті *ретельного вивчення системи встановлюються закони функціонування системи, які потім відтворюються за допомогою моделі. Поведінку системи, таким чином, досліджують на моделі.* Параметри моделі P в цьому випадку пов'язані з реальними процесами, що протікають в системі, і мають фізичну інтерпретацію.

Тому моделі такого типу називають фізичними моделями.

За другого - без усякого фізичного обґрунтування *припускається вид залежності F , невідомі параметри якої P потім відшукуються за даними спостережень за змінними системи X, Y* . Параметри P в цьому випадку не зв'язані з фізикою реальних процесів, що протікають в системі, або, точніше, цей зв'язок досліднику залишається невідомим.

Тому моделі такого типу називають *нефізичними моделями*.

В літературі зустрічаються також терміни моделей типу сірого та чорного ящика, які еквівалентні термінам фізичної та нефізичної моделі.

Для *фізичної моделі закони функціонування системи досліднику відомі, тому ящик є прозорим, сірим*.

Для *нефізичної моделі сутність системи залишається для дослідника скритою, потаємною, тобто ящик є чорним*.

Задачі моделювання

Однакові **об'єкти моделювання в залежності від цілі та задачі дослідження можуть мати різні моделі**.

Серед **задач моделювання** виділимо такі задачі:

- задача моделювання;
- задача управління;
- задача ідентифікації;
- задача оптимізації;
- задача прогнозування.

Задача моделювання (або пряма задача) полягає у відшуванні *значень вихідних змінних Y за відомих значень вхідних змінних X , відомій моделі F та визначених параметрах P* (див. рис. 2).

Задача управління (або зворотна задача) полягає у знаходженні таких *значень вхідних змінних X , що забезпечують задані значення вихідних змінних Y за відомої моделі F та фіксованих значеннях параметрів P* .

У формулюванні **задачі ідентифікації** відомими являються множина вхідних змінних X , множина вихідних змінних Y та множина моделей F . *Потрібно визначити єдину модель f із множини запропонованих моделей F , і визначити її параметри P , що забезпечують за вхідних значень X вихідні значення Y*

У постановці **задачі оптимізації** відомими являються модель F , множина можливих вхідних значень X та критерій оптимізації K , а від дослідника вимагається *знайти значення вхідних змінних X , значення параметрів P , та*

значення вихідних змінних Y , що задовольняють заданому критерію оптимізації K .

Задача прогнозування формулюється так, що за відомих для дослідника значеннях вхідних та вихідних значень моделі X_t , Y_t до моменту часу t та заданому часі прогнозування T потрібно визначити модель F та її параметри P , які забезпечують найліпший прогноз Y_{t+T} .

Стисло визначення методів моделювання представлені на рисунку 2.

ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ

Моделювання:	відомі $X, P, F \Rightarrow$ знайти Y
Управління:	відомі $Y, P, F \Rightarrow$ знайти X
Ідентифікації:	відомі X, Y , множина $F \Rightarrow$ знайти $f \in F, P$
Оптимізації:	відомі F , критерій $K \Rightarrow$ знайти P, X, Y
Прогнозування:	відомі $X_t, Y_t, T \Rightarrow$ знайти F, P, Y_{t+T}

Рис. 2. Загальна структура моделі

1.3 Методи моделювання

Серед великої кількості методів моделювання, що існують, виділимо такі методи: **аналітичне моделювання, математичне моделювання, імітаційне моделювання.**

Моделювання аналітичне - якщо залежність F вихідних змінних Y від вхідних її змінних X має аналітичний вигляд (тобто у вигляді відомих аналітичних функцій).

Нагадаємо, що функція називається аналітичною, якщо вона розкладається у ряд Тейлора. Аналітичні функції диференційовані безліч разів і тому до них можуть застосовуватись методи математичного аналізу.

Перевагою цього методу моделювання є можливість отримання залежності $Y=f(X)$ в явному вигляді і застосування до неї методів класичного математичного аналізу. Якщо є можливість побудувати аналітичну модель системи, то завжди віддають перевагу цьому методу моделювання.

Зауважимо, що відшукування залежності $Y=f(X)$ може виявитись настільки складним, що досліднику доведеться застосовувати спеціальне програмне забезпечення, а для деяких систем доводиться відмовлятися від пошуку абстрактної залежності $Y=f(X)$ і задовольнятися наближеним розв'язком, що знаходиться чисельними методами.

Деякі системи настільки складні, що не дивлячись на те, що опис їх функціонування піддається опису аналітичними функціями, знаходження

залежності $Y=f(X)$ у явному вигляді виявляється неможливим. Наприклад, усі задачі математичного програмування мають досить простий аналітичний опис, але розв'язок задачі може бути знайдений тільки в результаті виконання певної кількості кроків. Іншими словами відомий алгоритм відшукування точного розв'язку задачі, але сам розв'язок не може бути записаний в аналітичній формі. Такий **метод моделювання** називають **математичним моделюванням**. Зауважимо, що алгоритм F відшукування точного розв'язку задачі може бути реалізований дослідником самостійно, за допомогою спеціального програмного забезпечення або за допомогою чисельних методів.

Існують **системи, опис яких не піддається опису аналітичними функціями, але процес функціонування їх може бути описаний алгоритмом імітації**. Під імітацією розуміють відтворення за допомогою комп'ютерної програми процесу функціонування складної системи в часі. У результаті багатократних прогонів імітаційної моделі дослідник отримує інформацію про властивості реальної системи. Такий **метод моделювання** називають **імітаційним моделюванням**.

Стисло визначення методів моделювання представлені на рисунку 3.

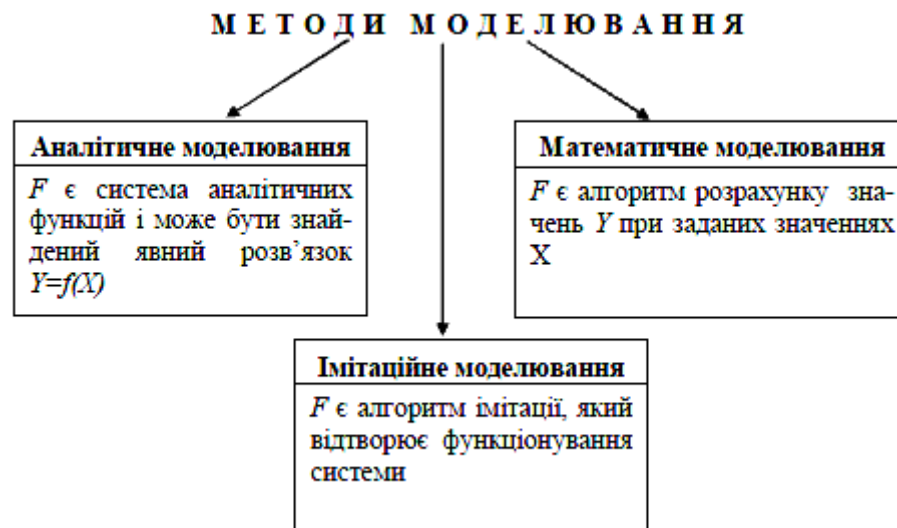


Рис. 3. Методи моделювання

1.4 Принципи побудови моделей

Розглянемо коротко основні принципи моделювання, які відображають достатньо багатий досвід, накопичений на даний час у галузі розроблення і використання моделей.

❖ **Принцип інформаційної достатності.** За повної відсутності інформації про систему модель побудувати неможливо. За наявності повної інформації про систему її моделювання недоцільне. *Існує деякий критичний*

рівень апріорних відомостей про систему (рівень інформаційної достатності), після досягнення якого можна побудувати її адекватну модель.

❖ **Принцип доцільності.** Модель створюється для досягнення деяких цілей, які визначають на первинному етапі формулювання проблеми моделювання.

❖ **Принцип здійсненності.** Модель, яка створюється, має забезпечувати досягнення мети дослідження з урахуванням граничних ресурсів з імовірністю, суттєво відмінною від нуля, і за кінцевий час. Звичайно задають деяке граничне значення P (ступінь ризику) ймовірності досягнення мети моделювання $P(t)$, а також сам граничний термін t досягнення мети. Модель вважають здійсненою, якщо $P(t) \geq P$.

❖ **Принцип множинності моделей.** Модель, яка створюється, має відображати в першу чергу ті властивості реальної системи (або явища), які впливають на вибраний показник ефективності. Відповідно під час *використання будь-якої конкретної моделі пізнаються лише деякі складові реальності.* Для повного її дослідження необхідно мати ряд моделей, які дали б змогу відобразити певний процес з різних боків і з різним ступенем детальності.

❖ **Принцип агрегації.** У більшості випадків складну систему можна подати такою, що складається з підсистем (агрегатів), для адекватного формального описування яких придатними є деякі стандартні математичні схеми. Принцип агрегації дає змогу досить гнучко перебудовувати модель залежно від завдань дослідження.

❖ **Принцип параметризації.** У ряді випадків модельована система має у своєму складі деякі відносно ізольовані підсистеми, які характеризуються певними параметрами, у тому числі векторними. Такі підсистеми можна замінювати в моделі відповідними числовими величинами, а не описувати процес їх функціонування. У разі необхідності залежність значень цих величин від ситуації може задаватись у вигляді таблиць, графіків або аналітичних виразів (формул), наприклад за допомогою регресійного аналізу. *Принцип параметризації дає змогу скоротити обсяг і тривалість моделювання, але слід мати на увазі, що параметризація знижує адекватність моделі.*

Потреба в моделюванні виникає як на етапі проектування систем для оцінювання правильності прийнятих рішень, так і на етапі експлуатації – для оцінювання наслідків внесення змін у системи.

В якості зрозумілого приклада можна назвати розрахунок матеріального

балансу: **блок-схема і система рівнянь – це модель системи**; на етапі проектування результати балансу дають змогу визначитися з вибором обладнання, нормами споживання напівфабрикатів та водопотоками, а на стадії функціонування системи – можливість покращити умови роботи обладнання та визначити "вузькі" місця у виробництві.

У цьому випадку на різних етапах проектування (технічний або робочий проект) з уточненням вихідних даних і виявленням нових суттєвих факторів ступінь деталізації процесу в системі зростає, що має відобразитись у моделі. Отже, у моделі можуть водночас знаходитись блоки з різним ступенем деталізації, які моделюють одні й ті самі компоненти проектованої системи. Іншими словами, *під час побудови моделі потрібно застосовувати методологію ітераційного багаторівневого моделювання.*

Розроблення моделі доцільно починати зі створення простої вихідної моделі, яку в процесі уточнення вхідних даних і характеристик системи ускладнюють і коригують, тобто *адаптують* до нових умов.

Водночас модель має залишатись досить наочною, тобто її структура має відповідати структурі модельованої системи, а рівень деталізації моделі повинен вибиратись з урахуванням мети моделювання, ресурсних обмежень (наприклад, час, кваліфіковані людські ресурси і кошти, виділені на проектування) і можливості отримання вхідних даних.

Отже, **модель має бути багаторівневою, адаптивною, наочною, цільовою, розвиватись ітераційним способом, ускладнюватись і коригуватись у процесі утворення,** що можливо тільки за умови побудови її блоковим (модульним) способом. Програмування та налагодження моделі доцільно провадити поетапно, з наступним збільшенням програмних модулів.

Один із способів *підвищення ефективності моделювання* полягає в тому, щоб **не будувати заново модель для кожної нової системи, а вирізняти окремі класи систем і створювати уніфіковані програмні моделі для класів у цілому.** Узагальнені програмні моделі дають змогу моделювати будь-яку систему із заданого класу без додаткових витрат на програмування. Така методологія забезпечує єдиний системний підхід до розроблення програмних реалізацій моделей і використовується під час об'єктно-орієнтованого програмування у вигляді **бібліотеки класів моделей.**

Розглянутий підхід можна реалізувати також у вигляді спеціалізованої мови або пакета моделювання, що дає змогу створювати узагальнені моделі шляхом уведення засобів розмноження ід моделей, реорганізації зв'язків між ними та їх параметричного налагодження. Цей спосіб орієнтовано на фахівців, добре обізнаних з мовою моделювання. Інший спосіб реалізації цього підходу полягає в розробленні діалогових інтелектуальних систем моделювання з використанням банку моделей та бази знань, які користувач може налагоджувати на конкретну реалізацію. У цьому разі етап програмування можна повністю виключити під час програмної реалізації імітаційної моделі завдяки використанню ефективних методів взаємодії з базами даних і застосуванню засобів генерації моделей.

1.5 Технологія моделювання

Основою моделювання є методологія системного аналізу.

Це дає змогу досліджувати систему, яка проектується або аналізується, за технологією операційного дослідження, включаючи такі **взаємопов'язані етапи**:

1. Формулювання проблеми та змістова постановка задачі.
2. Розроблення концептуальної моделі.
3. Розроблення програмної реалізації моделі (зазвичай застосовується комп'ютерна модель), яка включає:
 - а) вибір засобів програмування, за допомогою яких буде реалізовано модель;
 - б) розроблення структурної схеми моделі та складання опису її функціонування;
 - в) програмна реалізація моделі.
4. Перевірка адекватності моделі.
5. Організація та планування проведення експериментів, яке включає оцінювання точності результатів моделювання.
6. Інтерпретація результатів моделювання та прийняття рішень.
7. Оформлення результатів дослідження.

На **першому етапі замовник формулює проблему**. Організуються зустрічі керівника проекту із замовником, аналітиками з моделювання та експертами з проблеми, яка вивчається. Визначаються цілі дослідження та спеціальні питання, відповіді на які буде одержано за результатами дослідження; встановлюються критерії оцінювання роботи, які використовуватимуться для вивчення ефективності різних конфігурацій системи; розглядаються такі показники, як масштаб моделі, період дослідження і необхідні ресурси; визначаються конфігурації модельованої системи, а також потрібне програмне забезпечення.

На **цьому ж етапі провадиться цілеспрямоване дослідження модельованої системи**, залучаються експерти з проблеми, що вирішується, які володіють достовірною інформацією. Збирається інформація про конфігурацію системи і способи експлуатації для визначення параметрів моделі і вхідних розподілів імовірностей.

На **другому етапі розробляється концептуальна модель** – абстрактна модель, яка дає змогу **виявити причинно-наслідкові зв'язки, властиві досліджуваному об'єкту в межах, визначених цілями дослідження**. По суті, це формальний опис об'єкта моделювання, який відображає концепцію (погляд дослідника на проблему). Вона включає в явному вигляді логіку, алгоритми, припущення й обмеження.

Згідно з цілями моделювання визначаються вихідні показники, які потрібно збирати під час моделювання, ступінь деталізації, необхідні вхідні дані для моделювання.

Рівень деталізації моделі залежить від таких чинників: цілі проекту; критерії оцінювання показників роботи; доступність даних; достовірність результатів; комп'ютерні можливості;

думки експертів з проблеми, що вирішується; обмеження, пов'язані з часом і фінансуванням. Проводиться структурний аналіз концептуальної моделі, пропонується опис допущень, які обговорюються із замовником, керівником проекту, аналітиками та експертами з проблеми, яка вирішується.

Розробляються моделі вхідних даних, проводиться їх статистичний аналіз, за результатами якого визначають розподіли ймовірностей, регресійні, кореляційні та інші залежності. На цьому етапі для попереднього аналізу даних широко застосовують різні статистичні пакети (наприклад, Statistica).

Для динамічних систем проводиться поопераційний аналіз функціонування модельованої системи з детальним описуванням роботи елементів системи. За результатами такого аналізу можна з'ясувати, чи можна вирішити проблему без застосування засобів моделювання. Детально опрацьована концептуальна модель дає змогу замовнику з іншого боку поглянути на роботу системи та, наприклад, визначити вузькі місця системи, які спричиняють зниження її пропускної здатності.

Одна з найскладніших проблем, з якою має справу аналітик моделювання, полягає у визначенні, чи адекватна модель системі.

Якщо імітаційна модель «адекватна», її можна використовувати для прийняття рішень щодо системи, яку вона представляє, тобто ніби вони приймалися на основі результатів проведення експериментів з реальною системою. Модель складної системи може тільки приблизно відповідати оригіналу, незалежно від того, скільки зусиль затрачено на її розроблення, тому що абсолютно адекватних моделей не існує.

Оскільки модель завжди має розроблятися для певної множини цілей, то модель, яка є адекватною для однієї мети, може не бути такою для дослідження іншої. Слід відзначити, що адекватна модель не обов'язково є достовірною, і навпаки. Модель може бути достовірною, але, в цьому разі, не використовуватись для прийняття рішень. Наприклад, достовірна модель не може бути адекватною з політичних або економічних причин.

Під час розроблення програмної реалізації моделі визначаються засоби для програмування, тобто мови програмування або пакети. Наприклад, можуть використовуватись мови програмування загального призначення, такі як C чи PASCAL, або спеціалізовані засоби для моделювання (наприклад, Arena, AutoMod, Extend, GPSS, iThink). Перевага використання мов програмування полягає в тому, що, як відомо, вони мають невисоку закупівельну вартість, і на виконання моделі з їх допомогою витрачається менше часу. Натомість використання програмного забезпечення моделювання сприяє зменшенню тривалості програмування і вартості всього проекту.

Серед спеціалізованих пакетів для моделювання слід відзначити MATLAB з інтерактивним модулем Simulink. Пакет MATLAB є всесвітньо визнаним універсальним відкритим середовищем, і мовою програмування водночас, в якому інтегровані засоби обчислень, візуалізації, програмування та моделювання.

Здійснюється програмування моделі та її налагодження, виконуються тестові прогони моделі на основі контрольних даних, провадиться аналіз чутливості, щоб визначити, які фактори в моделі суттєво впливають на робочі характеристики системи і мають моделюватись дуже точно.

Після кожного з вищезазначених етапів перевіряється достовірність моделі.

Перевірку умовно можна розділити на два етапи: перевірка правильності створення концептуальної моделі, тобто задуму – *валідація*; перевірка правильності її реалізації – *верифікація*.

Під час перевірки достовірності потрібно відповісти на запитання про відповідність моделі модельованій системі, тобто визначити, наскільки ізоморфні система та модель. Як правило, у разі моделювання вимога ізоморфізму об'єкта та моделі надмірна, бо в цьому разі складність моделі має відповідати складності об'єкта. Через те будують гомоморфні моделі, в яких виконується вимога однозначної відповідності моделі об'єкту.

На етапі верифікації розглядають, чи правильно перетворено концептуальну модель (модельні припущення) на комп'ютерну програму, тобто виконують налагодження програми моделювання. Це складне завдання, оскільки може існувати безліч логічних шляхів.

Етап перевірки правильності реалізації моделі включає перевірку еквівалентності перетворення моделі на кожному з етапів її реалізації та порівняння станів. У цьому разі модель зазнає таких змін: концептуальна модель – математична модель – алгоритм моделювання – програмна реалізація моделі.

Валідація – це процес, який дає змогу встановити, чи є модель (а не комп'ютерна програма) точним відображенням системи для конкретних цілей дослідження.

Розробляється план проведення експериментів з моделлю для досягнення поставлених цілей.

Основна мета планування експериментів – вивчення поведінки модельованої системи за найменших витрат під час експериментів. Зазвичай провадять такі експерименти:

- порівнюють середні значення і дисперсії різних альтернатив;
- визначають важливість урахування впливу змінних та обмежень, які накладаються на ці змінні;
- визначають оптимальні значення з деякої множини можливих значень змінних.

Проведення експериментів планують для пошуку незначущих факторів.

У випадку оптимізації якого-небудь числового критерію формують гіпотези щодо вибору найкращих варіантів структур модельованої системи або режимів її функціонування, визначають діапазон значень параметрів (режимів функціонування) моделі, у межах якого знаходиться оптимальне рішення. Визначають кількість реалізацій та час прогону моделі кожної реалізації. Проводять екстремальний експеримент, за результатами якого знаходять оптимальне значення критерію і відповідні значення параметрів. Для оцінювання точності стохастичних моделей будують довірчі інтервали для одержуваних вихідних змінних.

Далі аналізують та оцінюють результати.

Наводять результати комп'ютерних експериментів у вигляді графіків, таблиць, роздруківок, а також визначають якісні і кількісні оцінки результатів моделювання. Для унаочнення моделі використовують анімацію. Обговорюють процес створення моделі та її достовірність, щоб підвищити рівень довіри до неї.

За отриманими результатами формують висновки з проведених досліджень і визначають рекомендації щодо використання моделі й прийняття рішень.

Вищенаведені ***етапи моделювання взаємопов'язані***, а сама процедура створення моделі ітераційна.

Це пояснюється тим, що після виконання кожного етапу перевіряється правильність і достовірність моделі та в разі невідповідності моделі об'єкту здійснюється повернення до попередніх етапів з метою коригування та підстроювання моделі.

Залежно від характеру внесених змін повертаються безпосередньо до попереднього етапу або до більш ранніх етапів. Детальніше технологія моделювання розглядається в наступних розділах.

На останньому етапі моделювання документально оформлюють усі результати дослідження і готують програмну документацію для використання їх під час розроблення поточних і майбутніх проектів.

1.6 Системний підхід до побудови моделей

Задачею системного аналізу являється формування опису системи, що відповідає меті дослідження системи.

Опис системи складається з:

- 1) набору вхідних змінних системи з указуванням їх основних характеристик;
- 2) набору вихідних змінних системи, визначення яких забезпечує досягнення цілі дослідження;
- 3) границь системи з указуванням того, що являється для системи її зовнішнім середовищем;
- 4) елементів системи з указування їх основних властивостей;
- 5) зв'язків між елементами системи.

Системний підхід до дослідження систем означає, що дослідник вивчає функціонування системи в цілому, не концентруючи свою увагу на окремих її частинах.

Системний підхід оснований на визнанні факту, що навіть *найліпше функціонування окремих підсистем та елементів системи не гарантує найліпшого функціонування всієї системи в цілому, оскільки завжди існує взаємодія між частинами системи.*

Всім системам притаманні характеристики, що являються перешкодою на шляху до поліпшення функціонування системи:

- ***змінюваність*** – жодна реальна система не являється статичною продовж тривалого проміжку часу, тому модель, що будується, має обмежений термін користування;
- ***наявність оточуючого середовища*** – в моделі має бути передбачений вплив зовнішнього середовища, який часто має випадковий характер;
- ***протиприродна поведінка*** – виникає як результат того, що інколи наслідок проявляється пізніше причини;
- ***тенденція до погіршення характеристик функціонування*** – окремі частини системи зношуються, в результаті чого погіршується їх робота, що в свою чергу призводить до не передбачуваних наслідків;
- ***взаємозалежність*** – усі частини системи залежать одна від одної, внаслідок чого погіршення характеристик функціонування однієї частини системи неминуче впливає на характеристики функціонування інших частин системи;
- ***організація*** – існує ієрархія підсистем, що підкоряється цільовому призначенню системи.

Будь-яка система об'єктивна і в той же час суб'єктивна з точки зору вибору границь системи та її елементів. Дійсно, одному й тому ж самому об'єктивному процесу

дослідник може поставити у відповідність різні системи і тільки досвід дослідника, його інтуїція і здатність творчо мислити допомагає здійснити вибір між багатьма варіантами і виконати дослідження системи найліпшим способом.

Моделі, побудовані із застосуванням системного підходу, отримали назву **системних моделей**.

Опис системи разом із указуванням цілі та задачі дослідження складає сутність **концептуальної моделі системи**. Назва „концептуальна” походить від латинського слова *conceptio*, що означає „сприйняття”.

Умовно можна виділити такі етапи створення *концептуальної моделі системи*:

- Визначення цілі дослідження системи (орієнтація).
- Вибір рівня деталізації системи (стратифікація).
- Визначення елементів системи (деталізація)
- Визначення впливу зовнішнього середовища (локалізація).
- Визначення зв'язків між елементами системи та із зовнішнім середовищем (структуризація).

Рекомендована література

1. Ивахненко А.Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. –Киев: Техника, 1975. – 312 с.
2. Ивахненко А.Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. –Киев: Наукова думка, 1982. – 296 с.
3. Клименюк О.В. Методологія та методи наукового дослідження: Навчальний посібник . К.: Міленіум, 2005. 186 с.
4. Шейко В., Кушнарєнко Н. Організація та методика науково-дослідницької діяльності: Підручник. –К.: Знання –Прес, 2003. –295 с.
5. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 272 с.

ЛЕКЦІЯ № 8 ПОПЕРЕДНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕХНОЛОГІЧНОЇ СИСТЕМИ – ВІДБІР ФАКТОРІВ "

План лекції:

1. ПОПЕРЕДНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕХНОЛОГІЧНОЇ СИСТЕМИ;
2. КЛАСИФІКАЦІЯ ФАКТОРІВ, ЩО ВПЛИВАЮТЬ НА ТЕХНОЛОГІЧНУ СИСТЕМУ;
3. ВЛАСТИВОСТІ ДОСЛІДЖУВАНИХ ФАКТОРІВ;
4. МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ СИЛИ ВПЛИВУ ФАКТОРІВ НА ВИХІДНИЙ ПАРАМЕТР;
5. МЕТОД ЕКСПЕРТНИХ ОЦІНОК (РАНГОВОЇ КОРЕЛЯЦІЇ);
6. КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ

1. ПОПЕРЕДНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕХНОЛОГІЧНОЇ СИСТЕМИ

В процесі проведення наукових досліджень, як правило, доводиться брати до уваги, що в житті зустрічаються складні об'єкти. Таке можна сказати і за технологічну систему виробництва паперу та картону, яка теж відноситься до класу складних технологічних систем і на її складові елементи, а отже і **на стан технологічної системи** (в цілому), **впливає маса факторів**.

Ці фактори проявляють себе на кожному із етапів виробництва, а саме: підготовка маси, включаючи стадії розпускання, очищення, розмелювання; складання композиції маси; відливання; пресування, сушіння полотна. Виробництво паперу чи картону – це послідовність взаємозалежних процесів, які визначають якість продукції, що виготовляється.

Таким чином, на хід технологічного процесу впливають зміни (незалежні детерміновані*) величини, які в певні проміжки часу набувають певних величин і певної сили впливу.

Ці змінні (незалежні детерміновані) величини, зазвичай, називаються **факторами**.

Кількість факторів під час технологічних досліджень практично необмежена, а це різко збільшує як кількість експериментів, які потрібно провести для їх дослідження, так і значні витрати на їх проведення.

Кожний із факторів має **область визначення, яка може бути дискретною чи неперервною**.

Межі цієї області задаються або технічними обмеженнями, або визначаються, виходячи з техніко-економічних міркувань, які враховують витрати на проведення досліджень.

В **області визначення** фактор може мати кілька значень, що відповідають числу **його різних станів**. Ці фіксовані значення фактора називаються **рівнями варіювання**.

У загальному випадку рівнів варіювання може бути будь-яка кількість. Вона визначається постановкою задачі, видом фактора, точністю його фіксування, передбачуваною складністю певного об'єкта.

Різниця між двома значеннями фактора називається **інтервалом варіювання**.

Його величина залежить від задачі дослідження і точності вимірювальної апаратури. Надмірне збільшення чи зменшення інтервалу варіювання призводить, відповідно, до ускладнення плану експерименту і зниження ефективності пошуку оптимуму.

Загальна кількість різних станів об'єкта чи процесу, що реалізується під час дослідження (**N**), можна визначити за залежністю:

$$N = \prod_{i=1}^k P_i, \text{ де}$$

k – кількість досліджуваних факторів;

P_i – кількість рівнів варіювання i -го фактора.

* - фактор має з вихідною величиною (Y) функціональний зв'язок (у вигляді формул).

Якщо всі фактори мають однакову кількість рівнів, тобто $P_i = p$, тоді залежність матиме вигляд: $N = p^k$.

Аналіз таких залежностей показує, що зі збільшенням k різко зростає загальна кількість серій дослідів N і витрати на їх проведення.

Тому, якщо $k \geq 10 \dots 12$, треба застосовувати різні статистичні методи відсіювання неістотно впливових факторів (а саме: можна скористатися кореляційним аналізом, мова про який буде йти далі в цій ЛЕКЦІЇ).

2. КЛАСИФІКАЦІЯ ФАКТОРІВ, ЩО ВПЛИВАЮТЬ НА ТЕХНОЛОГІЧНУ СИСТЕМУ

Усі змінні величини, що визначають поведінку і стан досліджуваної технологічної системи, незалежно від їх фізичного змісту поділяються на **групи** (рис.1):

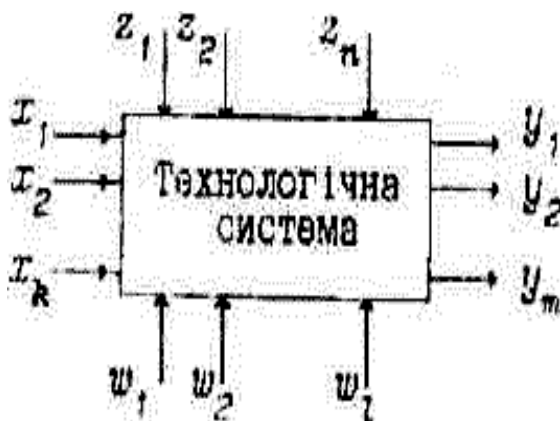


Рис. 1 Класифікація факторів, що впливають на стан технологічної системи

1. **Керовані фактори** $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, за допомогою яких заданий технологічний режим реалізується і підтримується сталим протягом потрібного часу.

До них належать режими варіння целюлози (температура, тиск, час варіння, геометричні параметри варильного котла та ін.).

2. **Некеровані контрольовані фактори** $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, що характеризують якість сировини чи проміжних продуктів, можливості технологічних систем і підсистем. Вони не призводять до цілеспрямованої зміни в ході експерименту. Початкову інформацію про значення цих змінних величин отримують в процесі попередніх досліджень і лабораторних аналізів.

Змінні величини X і Z утворюють єдину групу **контрольованих незалежних досліджуваного процесу**.

3. **Некеровані неконтрольовані фактори** $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, дію яких не можна врахувати в ході експериментів. Під дією цих факторів істотно збільшується розсіювання результатів, тобто знижується точність і спостерігається безперервна повільна зміна параметрів досліджуваного процесу чи об'єкта.

Залежно від способу опису всі фактори поділяються на **кількісні та якісні**.

Кількісні фактори - це змінні величини, які можна оцінити кількісно, тобто виміряти, зважити.

Якісні фактори - це деякі змінні, що характеризуються якісними властивостями. До них належать способи обробки, оператор, тип технологічного оснащення чи експериментальної установки та ін.

Хоча цим факторам не відповідає числова шкала, але в деяких випадках їх можна трансформувати в кількісні, використовуючи умовну порядкову шкалу, числа якої відповідають рівням якісного фактора.

3. ВЛАСТИВОСТІ ДОСЛІДЖУВАНИХ ФАКТОРІВ

Досліджувані фактори мають задовольняти певні вимоги, тобто бути **керованими, однозначними, сумісними і незалежними**.

Керованість гарантує можливість вибору та підтримування протягом усього дослідіу потрібного значення досліджуваного фактора, тобто дає можливість активно і безпосередньо впливати на об'єкт дослідження.

Поява некерованих факторів значною мірою збільшує помилку експериментів створює велике "шумове" поле, спричинює безперервну зміну досліджуваних факторів, що призводить до тимчасового дрейфу параметра оптимізації. Тому в ході дослідження потрібно врахувати і оцінити вплив якомога більшої кількості некерованих контрольованих факторів, що гарантує підвищення якості і точності дослідження.

У процесі досліджень бажано оперувати однозначними факторами, що характеризують безпосередній вплив на об'єкт, оскільки керувати складними факторами (відношенням висоти варильного котла до його діаметра або логарифмом будь-якої величини) важче. Проте складні фактори також можуть брати участь в експерименті.

Особливо важливою є вимога **сумісності факторів**, яка полягає в тому, що всі потрібні комбінації рівнів досліджуваних факторів можна безпечно реалізувати на практиці, Несумісність факторів звичайно спостерігається на межах областей їх визначення, а тому позбутись її в цих випадках можна лише за рахунок скорочення намічених областей визначення.

Якщо несумісність факторів виявляється всередині областей визначення, то для її усунення необхідно розбити цю область на підобласті і розв'язати кілька паралельних задач.

Вимога незалежності факторів передбачає можливість їх фіксації на будь-якому взятому рівні незалежно від рівнів інших факторів, тобто не повинно існувати лінійної кореляції між факторами.

Введення в експеримент корельованих факторів не сприяє отриманню нової інформації, оскільки один із факторів не дає додаткових відомостей про досліджуваний об'єкт, але збільшує витрати часу і матеріалів.

Тому щоб оцінити тісноту лінійного зв'язку між досліджуваними факторами, можна скористатися кореляційним аналізом (мова про який буде йти далі в цій ЛЕКЦІЇ).

4. МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ СИЛИ ВПЛИВУ ФАКТОРІВ НА ВИХІДНИЙ ПАРАМЕТР

Будь-який технологічний процес слід розглядати як складну систему, на яку впливає багато різних факторів. **Сила їх впливу на досліджувані вихідні параметри (продуктивність, якість продукції, її собівартість) різна і апіорі невідома.**

Тому в програму досліджень спочатку треба ввести всі фактори, виявлені на етапі аналізу літературних і виробничих даних, які чинять будь-який вплив на вихідні параметри.

Докладно вивчити всі ці фактори практично неможливо через дуже велику кількість експериментів і невиправдані витрати часу і матеріалів.

Усунення зазначених недоліків потребує **попереднього оцінювання** сили впливу кожного фактора і формування на цій основі групи найістотніших факторів, які треба всебічно дослідити на подальших етапах.

Інтуїтивний добір істотних факторів досить суб'єктивний і може призвести до помилкових результатів.

Тому на етапі попереднього дослідження широко використовуються **статистичні методи** відбору факторів, до яких належать:

- **методи експертних оцінок**, які ґрунтуються на статистичній обробці даних, отриманих у результаті опитування спеціалістів або аналізу наукових досліджень.

Коротко розглянемо суть експериментальних методів відбору факторів, а потім більш детально зупинимося на одному із методів експертних оцінок.

5. МЕТОД ЕКСПЕРТНИХ ОЦІНОК (РАНГОВОЇ КОРЕЛЯЦІЇ)

Важливим джерелом інформації в процесі вивчення технологічних об'єктів і вибору змінних величин (факторів), які визначають характер їх функціонування, є **експертні оцінки**. Вони відбивають досвід, інтуїцію та знання спеціалістів щодо об'єкта дослідження.

Експертні оцінки формуються на основі результатів найновіших та ще не опублікованих наукових праць, які виконані кожним із експертів.

Незважаючи на їхню суб'єктивність, експертні оцінки містять корисну об'єктивну інформацію. Ця інформація дає можливість оцінити силу впливу кожного досліджуваного фактора.

За застосування цього методу вважається, що думка групи експертів надійніша, ніж думка окремого експерта.

Метод ґрунтується на тому, що невідома характеристика досліджуваного явища трактується як випадкова величина, а індивідуальна оцінка кожного експерта щодо істинності та значущості тієї чи іншої події є відображенням її закону розподілу.

Реалізація методу експертних оцінок передбачає виконання таких нормалізованих і формалізованих етапів.

1. Формулювання мети дослідження, а також групи досліджуваних факторів (попереднє вивчення об'єкта).
2. Формування групи експертів.
3. Вибір методу опитування експертів.
4. Первинна обробка результатів опитування.
5. Перевірка вихідної гіпотези і обробка результатів опитування.

Попереднє вивчення об'єкта супроводжується ретельним аналізом літературних та експериментальних даних, отриманих як у виробничих так і у лабораторних умовах. Це дає можливість класифікувати всі відомі фактори за силою їх впливу на досліджуваний об'єкт, а також визначити межі зміни цих факторів, методи і точність їх вимірювання.

Якість такого аналізу залежить від обсягу і повноти відомостей з цього питання, кваліфікації дослідника, глибини його знань про процес або об'єкт, які вивчаються.

На підставі цієї інформації чітко формулюється мета дослідження та розроблюється анкета опитування. Анкета містить початкову інформацію про всі фактори, які впливають на досліджуваний об'єкт.

Форма анкети не регламентується, але вона має бути простою та зручною. Заповнюючи її, всі фактори розміщують без дотримання певного порядку. Це дає змогу уникнути деякої суб'єктивності в їх оцінюванні. Спосіб розміщення факторів має бути відомий експертам.

Проте навіть найретельніший аналіз літературних даних не дає можливості врахувати сучасний стан питання, що вивчається. Причина в тому, що завжди існує досить великий розрив у часі між отриманням і опублікуванням результатів дослідження.

З метою усунення зазначеного недоліку широко використовують **метод експертних оцінювань**, або **рангової кореляції**. Такий підхід дає можливість в результаті опитування спеціалістів дістати найповнішу інформацію про процес або об'єкт, які вивчаються, а також, і це головне, захистити експериментаторів від помилок за остаточного формулювання мети дослідження.

У процесі формування групи експертів (етап 2) послідовно визначають:

- кількість потенційно можливих експертів M ;
- мінімально припустиму чисельність групи M_{min} ;
- чисельність спеціалістів потрібної кваліфікації M_k ;

- загальну кількість наукових напрямків і шкіл з даної проблеми r ;
- мінімальне представництво будь-якого i -го напрямку в групі експертів M_i^{min} ;

- дійсне значення чисельності групи експертів M_0 .

Далі з цього складу виключаються експерти, чия кваліфікація не відповідає оцінюваному класу подій або чия потенційно можлива мета суперечить експерименту.

Щоб забезпечити рівноправне представництво різних наукових напрямків і шкіл, визначають середню чисельність кожної групи експертів.

Правила опитування експертів (етап 3) мають забезпечувати дотримання умов, що сприяють формуванню об'єктивної думки.

До таких умов належать:

- незалежність формування власної думки щодо оцінюваного процесу чи об'єкта;

- зручність роботи із запропонованими анкетами;
- прийнятні витрати часу для відповіді на запитання анкети;
- зручний час для отримання запитань і видачі відповідей;
- дотримання анонімності відповідей від решти членів експертної групи;
- проведення колективних обговорень оцінюваних подій;
- надання експертам потрібної інформації.

Опитування експертів може бути очним або заочним. У разі очного опитування можливе швидке заповнення анкет. Проте це потребує великих витрат коштів і часу на підготовку, а також вносить деякий суб'єктивізм в отримані відповіді.

Щоб уникнути цього, дослідник має строго дотримуватися розробленого плану бесіди та раніше визначених формулювань запитань.

Заочне опитування (враховуючи сучасні методи спілкування з використанням засобів Internet) просте і дешеве, крім того, у цьому разі виключається вплив дослідника на експерта. Проте цей метод дає велику кількість незаповнення і неправильно заповнених анкет.

Апріорна інформація, яку мають експерти про досліджуваний об'єкт, найчастіше носить якісний характер.

Тому, щоб подати цю інформацію в кількісному вираженні, доцільно скористатися методом упорядкування (ранжирування). За допомогою такого підходу досліджувані фактори (n) можна розмістити за силою їх впливу на вихідну функцію. Тоді сила впливу кожного фактора визначатиметься величиною присвоєного йому рангу $a_{i,j}$, яка виражається цифрами 1, 2, 3,... n .

Звичайно фактору, що найсильніше впливає на досліджуваний процес, присвоюють ранг $a_{i,j} = 1$, а наступним факторам - ранги відповідно 2, 3, і т.д. Якщо на думку експерта ряд факторів чинять рівнозначний вплив, їм присвоюють

"пов'язані" ранги (наприклад, четвертий та п'ятий фактори рівні, то ім. присвоюються номери 4,5 та 4,5).

Оскільки думка кожного спеціаліста має суб'єктивний характер, то ступінь узгодженості результатів ранжування групи експертів можливо оцінити **коефіцієнтом конкордації**.

Припустимо, що задана матриця рангів для m – дослідників і n – факторів. Середнє значення сум рангів за всіма факторами окремо:

$$L = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}}{n}; \text{ де: } a_{i,j} - \text{ ранг, приписаний } j\text{-дослідником } i\text{-фактору.}$$

$$\text{Сума квадратів відхилень цих сум від } L: S = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m (a_{ij} - L)^2 \right);$$

$$\text{Коефіцієнт конкордації: } W = \frac{12}{m^2(n^3 - n)}; \quad 0 \leq W \leq 1;$$

Якщо мали місце "пов'язані" ранги:

$$W = \frac{12 \cdot S}{m^2(n^3 - n) - m \sum_k T_k}; \text{ де } T_k = \frac{1}{12} \sum_l (t_l^3 - t_l);$$

t_l – число однакових рангів в k – ранжуванні.

Наприклад: Якщо записані ранги:

1; 2; 4,5; 4,5; 4,5; 4,5; 8; 8; 8; 10 то для цього випадку

$$T_k = \frac{1}{12} (4^3 - 4) + (3^3 - 3) = 84/12 = 7;$$

Істотність значення W визначається за допомогою критерію χ^2_w .

$$\text{За відсутності "пов'язаних" рангів: } \chi^2_w = \frac{12S}{m \cdot n(n+1)};$$

$$\text{За наявності: } \chi^2_w = \frac{12S}{m \cdot n(n+1) - \frac{1}{n-1} \cdot \sum_k T_k};$$

Значення χ^2_w порівнюється з табличним – таблиці $\chi^2_{w-\text{розподілу}}$ – (за заданого рівня значимості і числі ступенів свободи $f=n-1$).

За $\chi^2_w \geq \chi^2_{(f)}$ – ступінь узгодженості між дослідниками не визиває сумнівів.

Сума рангів по окремим факторам відкладається в порядку зростання вниз від деякої прямої, яка паралельно вісі абсцис.

Якщо великий розрив між рівнями рангів (перевищує найбільшу різницю між "сусідніми" факторами), то фактори відкидаються (розберемо на прикладі).

Приклад.

Спеціалісти	Фактори									
	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉	X ₁₀
1	1	4,5	2	4,5	3	7,5	6	9	7,5	10
2	2,5	1	2,5	4,5	4,5	8	9	6,5	10	6,5
3	2	1	4,5	4,5	4,5	4,5	8	8	8	10
$\sum_{j=1}^m a_{ij}$	5,5	6,5	9,0	13,5	12,0	20,0	23,0	23,5	25,5	26,5
$\sum_{j=1}^m a_{ij} - L$	-11,0	-10,0	-7,5	-3,0	-4,5	3,5	6,5	7,0	9,0	10
$(\sum_{j=1}^m a_{ij} - L)^2$	121,0	100,0	56,25	9,0	20,25	12,25	42,25	49,0	81,0	100,0

$$L = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}}{n} = \frac{(5,5+6,5+9,0+13,5+12,0+20,0+23,0+25,5+26,5)}{10} = 16,5.$$

Сума квадратів відхилень цих сум від L : $S = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m (a_{ij} - L)^2 =$

$$\begin{aligned} &= (5,5-16,5)^2 + (6,5-16,5)^2 + (9,0-16,5)^2 + (13,5-16,5)^2 + (12,0-16,5)^2 + (20,0-16,5)^2 + (23,0-16,5)^2 * \\ &* (23,5-16,5)^2 + (25,5-16,5)^2 + (26,5-16,5)^2 = \\ &= (-11,0)^2 + (-10,0)^2 + (-7,5)^2 + (-3,0)^2 + (-4,5)^2 + (3,5)^2 + (6,5)^2 + (7,0)^2 + (9,0)^2 + (10,0)^2 = \\ &= (121) + (100) + (56,25) + (9,0) + (20,25) + (12,25) + (42,25) + (49,0) + (81,0) + (100) = 591. \end{aligned}$$

Для першого експерта ранги повторюються двічі по два (4,5 і 6,5), тому:

$$T_1 = \frac{1}{12} \sum_{l=1}^l (t_l^3 - t_l) = \frac{1}{12} 2(2^3 - 2) = 1.$$

Для другого експерта ранги повторюються тричі по два (2,5 4,5 і 6,5), тому:

$$T_2 = \frac{1}{12} \sum_{l=1}^l (t_l^3 - t_l) = \frac{1}{12} 3(2^3 - 2) = 1,5.$$

Для третього експерта ранги повторюються один раз по чотири (4,5), а ще раз по три (8), тому: $T_3 = \frac{1}{12} \sum_{l=1}^l (t_l^3 - t_l) = \frac{1}{12} (4^3 - 4) + (3^3 - 3) = \frac{84}{12} = 7.$

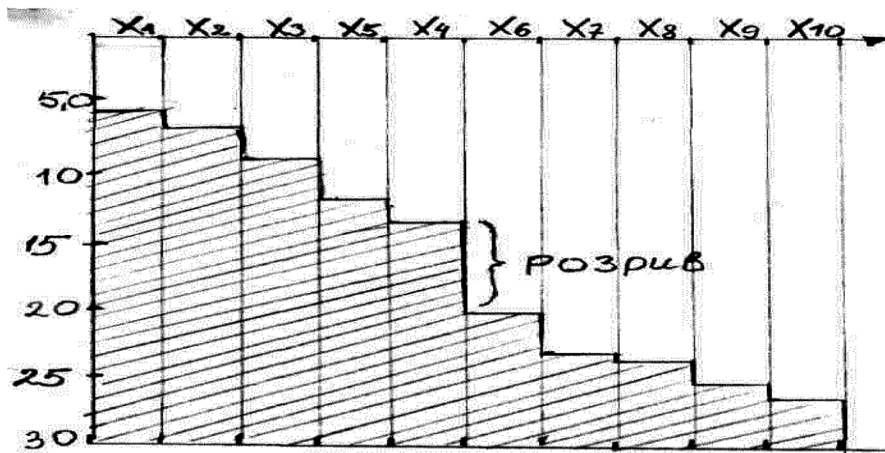
$$W = \frac{12 \cdot S}{m^2(n^3 - n) - m \sum_{k=1}^k T_k} = \frac{12 \cdot 591}{3^2(10^3 - 10) - 3(1 + 1,5 + 7)} = \frac{7092}{8910 - 285} = 0,822.$$

Після розрахунку коефіцієнта конкордації проводиться розрахунок:

$$\chi^2_w = \frac{12S}{m \cdot n(n+1) - \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^k T_k} = \frac{12 \cdot 591}{3 \cdot 10(10+1) - \frac{1}{10-1} \cdot (1+1,5+7)} = \frac{7092}{330 - \frac{9,5}{9}} = 21,56.$$

$$\chi^2_w = 21,56; \chi^2_{(f)} = 16,92.$$

Як видно із розрахунків, $\chi^2_w \geq \chi^2_{(f)}$, відповідно, ступінь узгодженості між дослідниками не визиває сумнівів



За даними, таблиці збудована гістограма. На основі її можна зробити висновки, що найбільш важливими є фактори: X_1 , X_2 , X_3 , X_5 , X_4 . Інші – "відірвалися" (створився розрив), тому їх можна вважати менш важливими і не враховувати під час проведення експериментальних досліджень.

6. КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ

Під кореляцією розуміється усіякий зв'язок між двома або декількома явищами.

Він може бути **детерміністичним** або **випадковим** (імовірнісним).

Перший тип зв'язку визначається чіткими закономірностями, зазвичай у вигляді формул.

Інший (другий) тип зв'язку - зв'язок між явищами тільки передбачається і відсутні теоретичні передумови, які б свідчили про такий зв'язок.

На відміну від методів регресійного аналізу методами **кореляційного аналізу** досліджують **випадкові зв'язки між незалежними перемінними**.

За **кореляційного аналізу** перевіряється лише сам факт, тобто статистична **гіпотеза про відсутність (або наявність) зв'язку**.

Зазвичай, за **кореляційного** аналізу досліджуються лише **лінійні зв'язки** між величинами, а статистичний критерій засвідчує про наявність або відсутність передбачуваного зв'язку.

Тому **негативна** відповідь за перевірки гіпотези про кореляційну залежність може свідчити не тільки про відсутність зв'язку, але і про можливу наявність нелінійної залежності між досліджуваними величинами.

Кореляційні методи аналізу найбільш широко розповсюджені під час кількісних оцінок в таких описових галузях науки, як психологія і педагогіка, в біологічних і медичних експериментах та ін.

Але такі методи необхідні і за проведення інших досліджень в тому числі наукових.

Найбільш доступно представити (наглядно) результати у вигляді **діаграм розсіювання** (кореляційного поля) (рис.1).

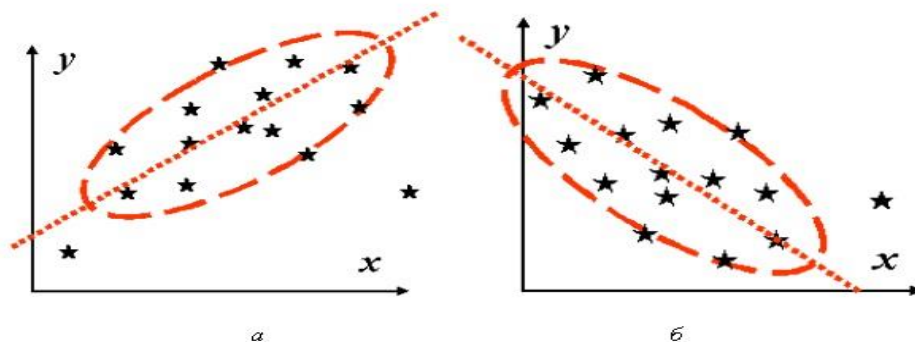


Рис. 1. Візуальна оцінка характеру кореляційного зв'язку за кореляційним полем: *а* – пряма кореляція, $r > 0$; *б* – зворотна кореляція, $r < 0$.

Для прямої кореляції характерною тенденцією є збільшення одного з параметрів, якщо збільшується інший, а для зворотної, навпаки: збільшення одного супроводжується, зазвичай, зменшенням іншого. Причиною фіктивної кореляції (тобто такої, що спостерігається, але не властива природним об'єктам) може бути неоднорідність сукупності даних, які відображають два різні об'єкти (рис. 2). Іноді методика дослідження впливає на створення видимості зв'язку там, де його немає. Наприклад, якщо вимірювати довжину і ширину без урахування орієнтації зразків, то всі точки кореляційного поля лежатимуть у секторі від 0 до 45° (замість сектора 0–90°), що помилково можна сприйняти як наявність деякого зв'язку.

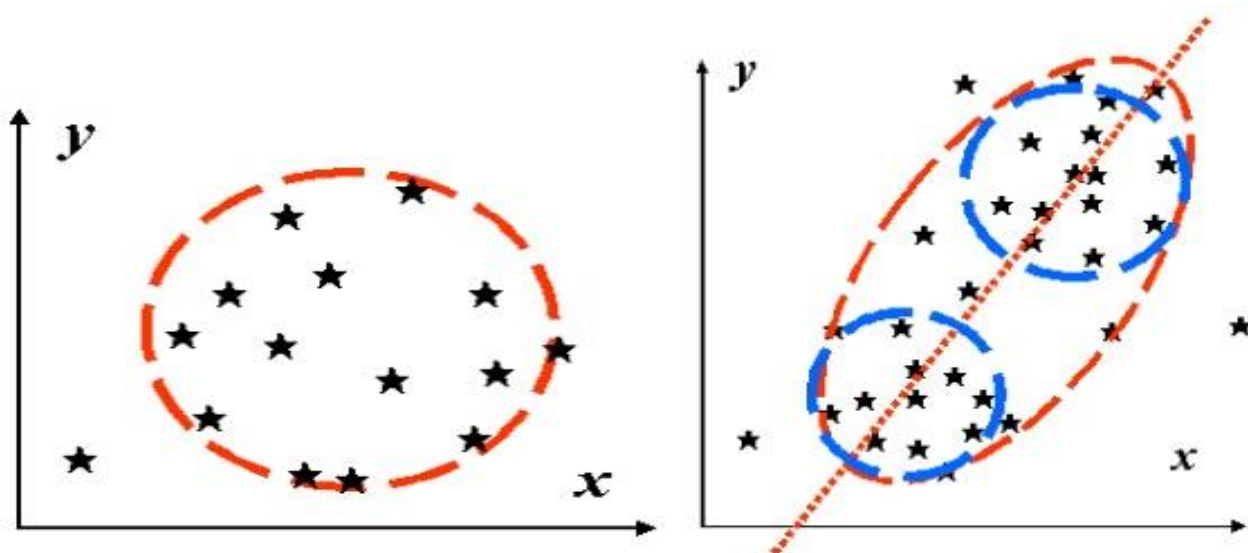


Рис. 2. Некорельовані дані, $r = 0$ і фіктивна кореляція (неоднорідні дані).

Для кількісної оцінки лінійного **кореляційного зв'язку** користуються вибіркоvim коефіцієнтом парної кореляції: Γ_{xy} - безрозмірною величиною, що нормована до значень середніх квадратичних відхилень досліджуваної величини S_x і S_y .

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \cdot S_x \cdot S_y}; \text{ де } n - \text{число пар точок.} \quad \underline{-1 \leq \Gamma_{xy} \leq 1}$$

Перевірка значимості Γ_{xy} проводиться з використанням таблиць теоретичних значень розподілення коефіцієнтів кореляції

Це розподілення залежить від вибраного рівня значимості α і числа ступенів свободи $f = n - 2$.

Наприклад. Значення $r_{xy} = 0,8$ достатньо високе, але лінійна залежність між змінними величинами незначна, якщо $n \leq 7$. З іншого боку, при $n = 100$ значення $r_{xy} = 0,2$ значиме (при $\alpha = 0,05$).

Властивості коефіцієнта кореляції

1. Коефіцієнт кореляції знаходиться в межах від -1 до +1.

$$-1 \leq \Gamma_{xy} \leq 1$$

Якщо $r > 0$, то кореляція пряма, а якщо $r < 0$ - зворотна. Пряма кореляція: більшим значенням випадкової змінної x відповідають більші значення y ; зворотна кореляція: більшим значенням x відповідають менші y і навпаки, більшим y - менші x .

2. Симетрія

$$r(x, y) = r(y, x)$$

3. Якщо x та y пов'язані лінійним функціональним зв'язком $y(x) = a + bx$, a і b - сталі, то $|r(x, y)| = 1$, і навпаки.

4. Якщо випадкові змінні лінійно незалежні, то $r(x, y) = 0$, і навпаки. Останні дві властивості можна сформулювати як необхідну і достатню умови, причому критерієм залежності випадкових величин x і y є відмінність коефіцієнта кореляції від нуля: $r \neq 0$.

Множинна лінійна кореляція

Дослідження взаємних ймовірностних зв'язків трьох і більше числа змінних набагато складніше, ніж дослідження парної кореляції. Пояснюється це тим, що основна умова кореляційного аналізу - нормальне розподілення всіх корелюючих величин - зазвичай не виконується.

Тому, за вирішення задач множинної кореляції мова йде, як правило, про три змінні величини, або про значні наближення під час дослідження більшого їх числа.

Для трьох випадкових величин X , Y і Z - розраховуються парні вибіркові коефіцієнти: Γ_{xy} , Γ_{xz} , Γ_{yz} .

Але між X і Y може спостерігатися зв'язок і в тому випадку, якщо має місце одночасного впливу третьої змінної величини Z .

Тоді значення повного коефіцієнту Γ_{xy} характеризує вже не тільки кореляційний зв'язок між X і Y , а включає також і частину кореляції, що визначається дією змінної Z : Γ_{xy-z} – кореляція між X і Y за вирахуванням кореляції Z .

$$\Gamma_{xy-z} = \frac{r_{xy} - r_{xz} \cdot r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)(1 - r_{yz}^2)}};$$

$$\text{Якщо } \Gamma_{xy}=0,9; \Gamma_{xz}=0,8; \Gamma_{yz}=0,6; \text{ то } \Gamma_{xy-z} = \frac{(0,9 - 0,8 \cdot 0,6)}{\sqrt{(1 - 0,8^2)(1 - 0,6^2)}} = 0,87.$$

Таким чином, на долю кореляції між фактором Z і перемінними X і Y припадає: $0,90 - 0,87 = 0,03$.

Коефіцієнт Γ_{xy-z} називається частковим коефіцієнтом кореляції.

Збільшення числа досліджуваних перемінних за кореляційного аналізу дозволяє вирішувати нові задачі дослідження зв'язків.

Так, наприклад, можна виявити, чи існує нелінійний зв'язок між будь-якою із пар перемінних XY , XZ чи YZ і третьою перемінною Z , Y чи X .

Мірилом такого зв'язку служить **множинний коефіцієнт кореляції**:

$\Gamma_{z-xy}, \Gamma_{y-xz}, \Gamma_{x-yz}$

$$\Gamma_{x-yz} = \frac{r_{xy}^2 + r_{xz}^2 - 2r_{xy} \cdot r_{xz} \cdot r_{yz}}{1 - r_{yz}^2};$$

Формули для розрахунку інших множинних коефіцієнтів кореляції можна отримати із цього виразу шляхом відповідної перестановки букв в символах.

Рекомендована література

1. Васильков Ю. В. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: учеб. Пособие / Ю. В. Васильков, Н. Н. Василькова. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 256 с.
2. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1968. – 356 с.
3. Клименюк О.В. Методологія та методи наукового дослідження: Навчальний посібник. К.: Міленіум, 2005. 186 с.
4. Шейко В., Кушнарєнко Н. Організація та методика науково-дослідницької діяльності: Підручник. –К.: Знання–Прес, 2003. –295 с.
5. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 272 с.

ЛЕКЦІЯ № 9 "МЕТОД САМООРГАНІЗАЦІЇ СКЛАДНИХ СИСТЕМ - НОВІ ТЕНДЕНЦІЇ В МАТЕМАТИЧНІЙ ТЕОРІЇ ЕКСПЕРИМЕНТУ (МТЕ)"

План лекції:

- 1. ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ МЕТОДУ САМООРГАНІЗАЦІЇ НА БАЗІ МЕТОДУ ГРУПОВОГО УРАХУВАННЯ АРГУМЕНТІВ МГУА;
1.1 КРИТЕРІЇ, ЩО ЗАБЕЗПЕЧУЮТЬ МАКСИМАЛЬНУ ІНФОРМАТИВНІСТЬ ЕКСПЕРИМЕНТУ, ЩО ПЛАНУЄТЬСЯ;**
- 2. ПІДВИЩЕННЯ ШУМОСТІЙКОСТІ ЕКСПЕРИМЕНТУ, ЩО ПЛАНУЄТЬСЯ ТА ВИБІР ЙОГО ПАРАМЕТРІВ;**
- 3. МЕТОДИКА ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ.**

1. Основні принципи методу самоорганізації на базі МГУА

Одною із важливих задач, які потрібно вирішувати в процесі науково-технічної діяльності, є моделювання складних систем на основі спостережень їх взаємодії з навколишнім світом.

Моделювання в даному випадку необхідне для того, щоб **узнати структуру і функції складного об'єкта (задача ідентифікації об'єкта)**, або визначити відповідні засоби активного впливу на об'єкт (**задача управління об'єктом**).

Для вирішення задачі ідентифікації математична теорія експерименту (МТЕ) пропонує один із підходів: "від простого до складного" або "від складного до простого".

Стосовно першого варіанту: "від простого до складного". Потрібно розробити спочатку просту лінійну модель, використати її для знаходження певного оптимуму, а вже потім переходити до описання області, яка близька до оптимуму, використовуючи плани II або, навіть, III порядку.

Разом з тим, щоб позбавитися недоліків, які несе з собою МТЕ, і використати для синтезу "фізичної" моделі один із алгоритмів методу самоорганізації моделей складних багатофакторних систем, необхідно скористатися методикою планування експерименту, що базується на результатах теорії передачі повідомлень (сигналів). Проведені дослідження з цього питання показали, що використання ідей із теорії передачі повідомлень (сигналів) в теорії самоорганізації моделей та планування експериментальних досліджень є доцільним.

Необхідно також відмітити, що методи самоорганізації математичних моделей, які базуються на використанні МГУА, є розвитком метода регресійного аналізу, тобто уже без його недоліків.

Метод МГУА базується на деяких принципах теорії навчання (обучения) та самоорганізації, а саме: на принципах "селекції", або спрямованого відбору.

Так, алгоритм методу МГУА, будучи заснованим на переборі варіантів з використанням зовнішніх критеріїв, надає право комп'ютеру самому віднайти потрібну інформацію на основі обробки вибірок даних (часто дуже коротких). Особливість МГУА в тому, що індуктивний метод забезпечує об'єктивний

характер вибору моделі. Автору ж моделі при цьому достатньо вказати лише, яким зовнішнім критерієм і якій послідовності їх використання повинна задовольняти модель.

В цілому МГУА вирішує задачу шумостійкого об'єктивного вибору моделі оптимальної складності за допомогою перебору варіантів по заданому ансамблю (або ієрархії) зовнішніх критеріїв, вказаних автором.

1.1 КРИТЕРІЇ, ЯКІ ЗАБЕЗПЕЧУЮТЬ МАКСИМАЛЬНУ ІНФОРМАТИВНІСТЬ ЕКСПЕРИМЕНТУ, ЩО ПЛАНУЄТЬСЯ;

Перед тим, як розібратися в суті методу, потрібно ще раз розглянути задачу **планування експерименту із загальних позицій**.

Таким чином, в загальному випадку **задача планування оптимального експерименту** являє собою задачу отримання максимальної інформації за витрат, які намагаються бути мінімальними.

$$X(N, M)_{opt} = \{(X \in \chi) : I \rightarrow \max; C(X) \rightarrow \min\}, \quad (1)$$

де N – число експериментальних точок;

M – число факторів ;

χ – множина можливих планів експерименту.

Із рівняння (1) випливає, що критерії інформативності і економічності притирічують один одному: із збільшенням N інформативність експерименту зростає, але, разом з тим, суттєво ростуть і витрати на реалізацію експериментальних точок.

Таким чином, із Лекції про інформативність експерименту потрібно згадати, що **інформативність експерименту** – це не що інше, як здатність матриці $X(N, M)$ надати інформацію про максимально можливу кількість різних станів об'єкта, який вивчається, незалежно від структури моделі і значимості тих або інших факторів, а також забезпечити максимальну достовірність результатів експерименту в умовах випадкових "шумових" перешкод.

На користь вибраної матриці експерименту вказує той факт, що в класичній теорії експерименту (МТЕ) критерії інформативності відсутні, тому **МТЕ обмежується лише задачами параметричної ідентифікації**, тобто визначенням коефіцієнтів моделі за заданою структурою моделі (лінійна або модель II чи III порядку). В МТЕ ми за певними критеріями вирішуємо адекватна чи неадекватна модель, структуру якої ми обрахували (визначили її коефіцієнти).

Під час конструювання матриці $X(N, M)$ необхідно досягти найбільшої інформативності експерименту у випадку, коли оптимальне число дослідів N^* менше за число дослідів N_0 повного факторного експерименту (ПФЕ), тобто $N \leq N^* \leq N_0$ ($N_0 = K^M$, де K – число дискретних значень кожного із факторів).

Як відомо, фактори по-різному впливають на параметр оптимізації. Тому, може виявитися, що фактор за попередніми дослідом був включений до матриці експерименту, але він не виявив суттєвого впливу на вихідний показник. З цього приводу доцільно вимагати, щоб за викреслювання із матриці будь-якого її стовпця вона знову складалася із N різних строчок (див. Лекцію про інформативність експерименту) - інформативність матриці повинна залишатися незмінною.

Якщо X_3 виявиться не значимим (або інший із факторів), інформативність матриці падає в 2 рази (та ще плюс витрати на реалізацію тих точок, що виявилися неінформативними!).

Разом з тим, такої інформації недостатньо для забезпечення вибору оптимальної матриці із множини варіантів, які можливі. В такому випадку необхідно використання додаткових критеріїв для побудови інформативного плану експерименту та значного обмеження області перебору варіантів.

Вказані вимоги можна забезпечити, використовуючи **критерії**:

- максимуму мінімальної міждослідної відстані

$$d_{\min} = \min_{l,k} \left[\sum_{j=1}^M x_{lj} \otimes x_{kj} \right] \rightarrow \max; \quad l, k \in \overline{1, N}; \quad l \neq k, \quad (2)$$

$$\text{де } x_{lj} \otimes x_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{і } x_{lj} = x_{kj}; \\ 1 & \text{і } x_{lj} \neq x_{kj}; \end{cases}$$

- максимуму евклідової відстані

$$\rho_{\min} = \min_{l,k} \left[\sum_{j=1}^M (x_{lj} - x_{kj})^2 \right]^{1/2} \rightarrow \max \quad (3)$$

Таким чином, критерій $d_{\min}$ у виразі (2) забезпечує максимум ентропійної оцінки, яка розраховується за викреслювання будь-якого стовпця, їх пари, трійки і т.д в матриці експерименту.

Критерій $\rho_{\min}$ у виразі (3) максимізує обхват області експерименту, що також є умовою підвищення його інформативності і сприяє мінімізації дисперсій оцінок коефіцієнтів моделі незалежно від її структури.

Потрібно відмітити, що ефективним є використання критеріїв в послідовності (2) – (3).

В цьому легко переконатися на прикладі двох факторів. Так, використання тільки критерію (3) призводить до того, що експериментальні точки будуть максимально віддалені від центру плану і розміщатися лише на двох рівнях. У випадку, коли один із факторів X_1 або X_2 буде незначимий, можлива втрата 50% інформації. Якщо ж послідовно використати критерії, як показано вище, то варіювання факторів зростає до 4 рівнів.

Із наведеного вище опису методики планування експерименту виходить, що збільшення інформативності експерименту можливе не тільки за рахунок збільшення кількості експериментальних точок, але і завдяки оптимальному розміщенню їх у факторному просторі.

2. Підвищення шумостійкості експерименту, що планується та вибір його параметрів

Підвищення шумостійкості експерименту пов'язане з проблемою достовірності результатів експерименту. Чим більше результати реального експерименту Y_i наближаються до результатів ідеального експерименту y_i , тим вони достовірніші. Таке можливо тільки у випадку відсутності "шуму".

Але, в житті, на результати реального експерименту завжди нашаровується певний рівень "шумів" (перепон). До них потрібно віднести відхилення значень вихідної величини, що визвано похибкою вимірювань або відбувається під впливом неконтрольованих збурювань. Результати експерименту являються більш достовірними у випадку статистичної стійкості (відтворюваності) результатів кожного із дослідів, тобто у випадку детермінованої реакції об'єкту $y_i = F(x_i, a)$ на один і той же вплив x_i вхідних змінних (факторів).

Питання достовірності результатів експерименту можна розглянути в геометричній інтерпретації.

Кожній строчці матриці $X(N, M)$ в залежності від структури і коефіцієнтів об'єктивно існуючої оптимальної моделі на числовій вісі відповідає значення y_i . Розподіл результатів дослідів на вісі носить випадковий характер, викликаний впливом "шумів". Зі збільшенням дисперсії "шумів" стає важче пояснити характер впливу вхідних змінних (факторів) на вихідні (параметр оптимізації).

У відповідності із системою нерівностей

$$|y_i - Y_i| < |y_j - Y_j|, \quad i = \overline{1, N}; \quad j = \overline{1, N}; \quad i \neq j. \quad (4)$$

можна сказати, що результати Y_i будуть достовірними, якщо виміряне значення $\hat{Y}_i$ розміщується на числовій вісі ближче до значення y_i , чим до значення вихідної величини y_j , $i \neq j$. Навпаки, процедура визначення коефіцієнтів моделі за допомогою методу найменших квадратів (МНК) стає некоректною.

Якщо рівень "шумів" стає настільки значним, що хоча б одне із нерівностей (4) перетворюється в рівність, то такий рівень "шумів" стає межею допустимості.

Порушення нерівностей (4) призводить до втрати достовірності результатів експерименту.

Для боротьби з "шумом" в теорії передачі сигналів розробляється шумостійкий код, всі кодові комбінації якого максимально віддалені один від одного. Поняття відстані Хеммінга, яке використовується в теорії кодування, співпадає з поняттям критерію мінімальної міждослідної відстані, який дозволяє експериментатору максимізувати інформативність експерименту як у відсутності так і за наявності "шумів".

Критерій $\rho_{\min}$ у виразі (3) дозволяє відсіяти неефективні точки, які були відібрані за критерієм (2), в силу його неефективного відбору за числа рівнів варіювання факторів $K > 2$ і сприяє збільшенню міждослідної відстані, але уже на евклідовій відстані.

Значний вплив на шумостійкість експерименту мають такі параметри, як число дослідів N і число рівнів варіювання факторів K .

В умовах структурної ідентифікації, коли структура моделі невідома, вибір числа рівнів варіювання факторів K має певні труднощі.

Із МТЕ відомо, що для синтезу лінійної моделі досить варіювати фактори X_j , $j = \overline{1, N}$ на двох рівнях. Оскільки ймовірність, що модель лінійною, на практиці дуже незначна, то K потрібно збільшити. Виходячи із практичного досвіду, найбільш підходящим є $K=4$ з обов'язковою точкою в центрі плану експерименту. При цьому ступінь окремих входних факторів в моделі може досягати $k = K = 4$.

Вибір числа точок експерименту N безпосередньо залежить від K , а також рівня "шумів". Збільшення N призводить до зростання кількості інформації про вихідні величини в різних точках факторного простору. Але, разом з тим, падає потенціальна шумостійкість експерименту.

Виходячи із принципів теорії інформації, числа експериментальних точок N повинно бути кратним, оскільки це дозволяє максимізувати ентропію по кожному із стовпців матриці $X(N, M)$ за рахунок рівноймовірності різних значень відповідних змінних.

Якщо в кожному із 2^M квадрантів розмістити рівну кількість точок, то можливо добитися ефективного зондування факторного простору. Досягти цього можливо, якщо скористатися системою знаків повного факторного експерименту (ПФЕ), або, якщо M дуже велике, дробною реплікою. Із цього виходить, що N повинно бути результатом піднесення до цілої ступені двійки, взятої за основу. Це ще раз підтверджує висновок, що K раціонально признати рівним 4.

Визначившись зі значеннями N , M , K , а також із системою знаків для всіх точок матриці експерименту, необхідно закодувати значення вхідних факторів, як це прийнято в МТЕ, щоб можна було скористатися процедурою синтезу плану експерименту та визначити з допомогою комп'ютера значення вхідних факторів.

Враховуючи, що матриця знаків задана, можливо скористатися усіченим алфавітом кодових символів $U_{k/2} = [1, \dots, k/4, k/2]$. Дослід в "нульовій" точці додається автоматично, оскільки співвідношення "0" з іншими кодовими символами різко знижує величину критерію $d_{\min}$ у виразі (2).

3. Методика обробки результатів експериментальних досліджень

В основу задачі структурної ідентифікації (пошук структури моделі та її коефіцієнтів) покладено принцип "чорного ящика", коли причинно-наслідкові зв'язки між вхідними факторами та вихідними параметрами вважаються невідомими.

Разом з тим, вважається, що існує певна **функція, яка адекватно відображає реакцію об'єкта (його поведінку) на вхідні сигнали.**

Задача структурної ідентифікації полягає в побудові оптимальної в деякому сенсі моделі за результатами реалізації вхідних і вихідних сигналів. При цьому, допускається, що значення вхідних змінних (факторів) є детермінованими, а вихідні характеристики – випадковими величинами в результаті впливу "шумів" (випадкових похибок вимірювань, неврахованих збурювань, що не піддаються контролю і т.п.).

В зв'язку з цим, результатом структурної ідентифікації є оцінки

$$\tilde{y}_s = \tilde{M} \left[\frac{Y_s}{x} \right] = \tilde{F}_s(x, a), \quad s = \overline{1, L+R},$$

де $M[\cdot]$ - оцінка математичного очікування s -ої характеристики об'єкта за заданого x .

Y_s – виміряне значення характеристики, яке складається із суми регулярного сигналу y_s і випадкової похибки ξ : $Y_s = y_s + \xi$;

$F[\cdot]$ - оцінка істинної характеристики;

$L+R$ - визначає в просторі вхідних змінних область допустимих рішень з урахуванням функціональних і критеріальних обмежень.

Під час ідентифікації складних багатофакторіальних систем найбільш ефективним є метод самоорганізації математичних моделей, який базується на тому, що оперуючи тільки набором експериментальних даних, які використані для визначення оцінок коефіцієнтів за методом найменших квадратів (МНК), неможливо віднайти найкращу, єдину модель.

Для цього потрібно скористатися деяким зовнішнім критерієм, яким, наприклад, може бути похибка, що вираховується на новій серії експериментальних даних. Мінімум похибки на цих точках може слугувати визначальним моментом того, що отримана модель є модель оптимальної складності.

Процес вирішення задачі структурної ідентифікації можливо надати у вигляді системи взаємопов'язаних ланцюгів:

- 1) постановка задачі і аналіз апіорної інформації;
- 2) проведення експерименту в режимі нормального функціонування об'єкта або у відповідності з деяким планом із множини планів $\chi = \{x_1, x_2, \dots\}$;
- 3) аналіз і попередня обробка результатів експерименту;
- 4) вибір множини можливих аргументів (опорних функцій);
- 5) розробка або вибір генератора складності моделі;
- 6) вибір способу розбивки таблиці експериментальних даних на навчаючу (А), перевірочну (В) та екзаменаційну (С) вибірки із множини $R = \{r_1, r_2, \dots\}$;
- 7) самоорганізація моделі, яка задовольняє критеріям оптимальності $Q = \{q_1, q_2, \dots\}$;
- 8) аналіз та довизначення моделі;
- 9) практичне використання моделі.

Наведена схема є достатньо загальною і може бути використана для структурної ідентифікації об'єктів будь-якої природи. На практиці ж задачу доводиться членувати.

Перш за все фіксується клас можливих моделей $\mathcal{F}$ (дискретні поліноми, диференціальні рівняння та ін.). З врахуванням цього формується матриця X , яка

забезпечує можливість об'єктивного порівняння моделей $F \in \mathcal{F}$ за критеріями Q за декількома варіантами розбивки на A, B, C послідовності.

Практично, як правило, не вдається достатньо повністю вирішити задачу, які поставлені перед конкретними ланцюгами задачі структурної ідентифікації. Це призводить до того, що на виході ланцюга 7 маємо не одну, а декілька однакових (рівноцінних) моделей, що потребує введення етапу довизначення оптимальної моделі. Необхідність етапу довизначення витікає ще із того, що задача структурної ідентифікації є багатокритеріальною і, таким чином, не може мати однозначного, теоретично обґрунтованого методу практичного вирішення будь-якої задачі.

Тому довизначення є не що інше, **як вибір найбільш раціонального рішення (моделі) на базі додаткових зовнішніх критеріїв або експериментальної оцінки моделей.**

Рекомендована література

1. Ивахненко А.Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. –Киев: Техника, 1975. – 312 с.
2. Ивахненко А.Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. –Киев: Наукова думка, 1982. – 296 с.
3. Клименюк О.В. Методологія та методи наукового дослідження: Навчальний посібник . К.: Міленіум, 2005. 186 с.
4. Шейко В., Кушнарєнко Н. Організація та методика науково-дослідницької діяльності: Підручник. –К.: Знання –Прес, 2003. –295 с.
5. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 272 с.

ЛЕКЦІЯ № 9 (дод.) "Метод самоорганізації для синтезу матеріалів із заданими властивостями "

План лекції:

1. МЕТОД САМООРГАНІЗАЦІЇ ДЛЯ СИНТЕЗУ МАТЕРІАЛІВ ІЗ ЗАДАНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Мета даної додаткової лекції – показати **можливості використання моделей, розроблених на базі методу самоорганізації складних технологічних систем, для створення (або синтезу), наприклад, пакувальних матеріалів з заданими характеристиками (властивостями).**

Як і будь-яка математична задача, задача синтезу з використанням математичних моделей, має свої обмеження. В даному випадку обмеженням є те, що всі три задачі, які ми будемо сьогодні вирішувати, лежать в єдиному полі факторного простору (восьмифакторне поле, якщо його можливо уявити).

Як ми, по ходу лекції, переконаємося, зміни певних факторів призводять до того, що ми отримуємо новий матеріал з певними (заданими) властивостями.

Таким чином, як показує практика, класичний підхід при розробленні нових видів пакувальних матеріалів (а вони займають важливе місце в нашому житті) передбачає проведення численних та копітких досліджень в лабораторних і промислових умовах. В результаті їх проведення спеціаліст експериментальним шляхом може віднайти потрібне співвідношення рівнів технологічних параметрів.

Ми спробуємо запропонувати дещо іншу методику.

Об'єктом дослідження та аналізу у даному випадку є властивості пакувальних паперових матеріалів та пов'язані з ними технологічні умови їх виготовлення.

Інструментом для визначення (точніше розрахунку) умов виготовлення таких нових матеріалів слугують математичні моделі, отримані за допомогою сучасних засобів обчислювальної техніки.

В якості беззаперечної переваги такого підходу є те, що **використання такої методики має значно підвищити ефективність науково-дослідної роботи та відкриває нові шляхи до розробок та виготовлення пакувальних (можливо і інших) матеріалів з наперед заданими властивостями.**

Як приклад реалізації запропонованого методу розглянемо вибір параметрів та технологічних умов виготовлення пакувальних паперових матеріалів для пакування такої продукції:

- **вологовмісної** (для пакування тваринного та дитячих сирків);
- **жировмісної** (для пакування масла, маргарину та іншої жировмісної продукції);
- **виробів з карамелі** (повинна витримувати багаторазові перегини при закрутці карамелі на автоматах).

Перша частина такої роботи має бути присвячена вирішенню комплексу задач, що включає проведення експериментальних досліджень по визначенню властивостей пакувальних матеріалів, отриманих при заданих умовах та параметрах технологічного процесу та розроблення на їх основі математичних моделей.

Головна вимога, яка при цьому має виконуватися, що експериментальні дослідження мають проводитися в настільки широкому діапазоні факторів, щоб в нього потрапили умови виготовлення всіх трьох матеріалів, які ми плануємо отримати.

Наступним етапом роботи має бути проведення аналізу та дослідження з використанням ПК створених моделей. Це дозволить нам **визначити область, у межах якої можливий пошук оптимальних параметрів і технологічних умов, що будуть використані під час розроблення вище згаданих пакувальних матеріалів.**

Для того, щоб глибше зрозуміти задачу, які ми будемо вирішувати, коротко зупинимося на тому, що залежними величинами (параметрами оптимізації), за якими будуть розроблятися математичні залежності прийнято такі властивості пакувальних матеріалів:

- руйнівне зусилля, Н (Y_1);
- відносне видовження (машинний напрям), % (Y_2);
- відносне видовження (поперечний напрям), % (Y_3);
- міцність на злам (машинний напрям), ч.п.п (Y_4);
- міцність на злам (поперечний напрям), ч.п.п (Y_5);
- вологоміцність, % (Y_6);
- повітропроникність, $\text{см}^3/\text{хв}$ (Y_7);
- поверхнева вбирність води, Кобб_{30} , $\text{г}/\text{м}^2$ (Y_8);
- жиропроникність, мг (Y_9).

Тоді як змінними величинами (факторами), що характеризують технологічний процес, були вибрані:

- щільність паперу-основи, $\text{г}/\text{см}^3$ (X_1);
- повітропроникність паперу-основи, $\text{см}^3/\text{хв}$ (X_2);
- поверхнева вбирність води під час одностороннього змочування паперу-основи (Кобб_{30}), $\text{г}/\text{м}^2$ (X_3);
- масова частка розчину компонента 1, % (X_4);
- масова частка розчину компонента 2, % (X_5);
- масова частка розчину компонента 3, % (X_6);
- масова частка розчину компонента 4, % (X_7);
- витрата суміші хімічних речовин, $\text{г}/\text{м}^2$ (X_8).

Стосовно змінних величин слід відмітити, що перші три фактори (X_1 - X_3) характеризують показники якості паперу-основи, а X_4 - X_8 – складають групу факторів, що характеризують склад водного розчину та витрати суміші хімічних речовин, які **наносяться на поверхню паперу-основи для надання їй комплексу бар'єрних і захисних властивостей**.

Таким чином є два напрямки впливу на властивості пакувального матеріалу:

- за рахунок зміни характеристик паперу-основи;
- за рахунок вибору композиції суміші хімічних речовин та їх витрати.

В результаті були розроблені математичні моделі:

а) математична модель за показником руйнівного зусилля:

$$Y_{\text{руйнів.}} = 77,30 + 4,94 * X_2 * \text{Cos}^3(X_5) - 5,09 * 10^{-2} * X_2 * X_5 * X_8 + \quad (1)$$

$$+ 2,31 * \text{Cos}(X_1) * \text{Sin}^2(X_4) * X_8 - 3,0 * 10^1 * X_1^2 * \text{Sin}(X_6) * \text{Sin}(X_8) -$$

$$- 2,18 * 10^1 * \text{Cos}(X_1) * \text{Sin}(X_3) * \text{Cos}^2(X_6)$$

Похибка розроблення математичного опису не перевищує 2,34 %.

б) математична модель за показником відносного видовження (машинний напрям):

$$\begin{aligned} Y_{\text{в.вид.}(м.н.)} = & 3,19 + 8,01 \cdot 10^{-5} \cdot X_3 \cdot \cos(X_3) \cdot X_5 \cdot \cos(X_7) \cdot X_8 + \\ & + 2,96 \cdot 10^{-3} \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot \cos(X_6) \cdot \sin(X_8) + 7,34 \cdot 10^{-3} \cdot \operatorname{tg}(X_3) \cdot (X_6) - \\ & - 8,67 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(X_1) \cdot \sin(X_3) \cdot X_4 + \\ & + 3,22 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(X_1) \cdot \sin(X_2) \cdot \sin(X_4) \cdot (X_8) - 2,02 \cdot 10^{-3} \cdot X_2 \cdot X_5 \end{aligned} \quad (2)$$

Похибка розроблення математичного опису не перевищує 6,15 %.

в) математична модель за показником відносного видовження (поперечний напрям):

$$\begin{aligned} Y_{\text{в.вид.}(п.н.)} = & 6,67 + 1,09 \cdot \operatorname{tg}(X_2) \cdot \cos(X_3) \cdot \operatorname{tg}(X_4) \cdot X_5 \cdot \cos^2(X_8) - \\ & - 9,66 \cdot 10^{-4} \cdot \cos(X_1) \cdot X_3 \cdot \cos^3(X_7) \cdot \operatorname{tg}(X_8) + 2,83 \cdot 10^{-2} \cdot (X_5) - \\ & - 1,20 \cdot 10^{-1} \cdot X_1 \cdot \operatorname{tg}(X_1) \cdot \cos(X_4) \cdot \cos(X_6) + \\ & + 2,09 \cdot 10^{-2} \cdot \operatorname{tg}(X_1) \cdot X_2 \cdot \operatorname{tg}(X_3) \cdot \sin(X_6) \cdot \sin(X_8) \end{aligned} \quad (3)$$

Похибка розроблення математичного опису не перевищує 3,33 %.

г) математична модель за показником міцності на злом (машинний напрям):

$$\begin{aligned} Y_{\text{злом.}(м.н.)} = & 6,57 \cdot 10^3 + 1,19 \cdot \cos^2(X_1) \cdot X_2 \cdot X_4 \cdot X_5^2 - \\ & - 9,52 \cdot 10^2 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot \sin(X_2) \cdot \sin(X_8) \cdot \cos(X_8) - \\ & - 5,74 \cdot 10^3 \cdot \sin(X_3) \cdot \cos^2(X_5) - 4,57 \cdot X_1 \cdot X_4 \cdot X_5 \cdot X_6 \cdot \sin(X_8) \cdot \cos(X_8) + \\ & + 1,99 \cdot 10^3 \cdot \cos(X_3) \cdot \sin(X_4) \cdot \cos(X_6) \cdot \cos(X_7) \cdot \sin(X_8) \cdot \cos(X_8) \end{aligned} \quad (4)$$

Похибка розроблення математичного опису не перевищує 0,96 %.

д) математична модель за показником міцності на злом (поперечний напрям):

$$\begin{aligned} Y_{\text{злом.}(п.н.)} = & 120,55 - 1,55 \cdot 10^{-1} \cdot X_2^3 \cdot X_4^2 \cdot \sin(X_5) + \\ & + 6,31 \cdot 10^{-1} \cdot \cos(X_1) \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_6 \cdot \cos^2(X_7) + \\ & + 3,43 \cdot X_3 \cdot \sin(X_4) \cdot \cos(X_4) \cdot X_5 \cdot \cos(X_7) \cdot \sin(X_8) - \\ & - 8,88 \cdot 10^1 \cdot X_7 \cdot X_8 \cdot \sin^3(X_8) + 2,62 \cdot 10^{-1} \cdot \cos(X_1) \cdot X_2^2 \cdot \sin(X_2) \cdot X_3 \cdot X_5 - \\ & - 1,19 \cdot 10^3 \cdot \cos(X_3) \cdot \cos(X_6) \cdot \cos^2(X_7) \cdot \cos^2(X_8) \end{aligned} \quad (5)$$

Похибка розроблення математичного опису не перевищує 0,15 %.

е) Математична модель за показником вологоміцності

$$\begin{aligned} Y_{\text{вологоміцн.}} = & 13,90 - 3,96 \cdot \cos(X_1) \cdot \cos(X_3) \cdot \cos(X_4) \cdot \cos^2(X_6) + \\ & + 1,10 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot \cos(X_7) \cdot \sin^2(X_8) - \\ & - 6,52 \cdot 10^{-1} \cdot X_1 \cdot \sin(X_1) \cdot \cos(X_6) \cdot \cos(X_7) \cdot X_8 \cdot \cos(X_8) - \\ & - 5,07 \cdot 10^{-1} \cdot \cos^3(X_1) \cdot \sin(X_2) \cdot X_8 \cdot \sin(X_8) - \\ & - 5,95 \cdot 10^{-1} \cdot \cos(X_3) \cdot X_5 \cdot \cos^2(X_7) \cdot \sin^2(X_8) \end{aligned} \quad (6)$$

Похибка розроблення математичного опису не перевищує 1,15 %.

ж) математична модель за показником повітропроникності

$$\begin{aligned} Y_{\text{повітропр.}} = & 1,78 - 2,60 \cdot 10^{-6} \cdot X_2 \cdot X_4^5 + 2,17 \cdot 10^{-4} \cdot X_2^2 \cdot X_3 + \\ & + 4,75 \cdot 10^{-2} \cdot X_5 - 1,39 \cdot 10^{-1} \cdot X_1^5 \cdot X_6 - \\ & - 2,96 \cdot 10^{-4} \cdot X_2 \cdot X_8^2 + 8,45 \cdot 10^{-2} \cdot X_5 \cdot X_7 \end{aligned} \quad (7)$$

Похибка розроблення математичного опису не перевищує 7,96 %.

з) математична модель за показником вбирності води

$$\begin{aligned}
 Y_{\text{вбирність}} = & 18,39 + 5,10 \cdot \cos^2(X_1) \cdot \sin(X_4) \cdot X_6 \cdot \sin^2(X_8) + \\
 & + 1,65 \cdot 10^1 \cdot \cos^2(X_1) \cdot \cos(X_3) \cdot \sin(X_4) \cdot X_5 \cdot \cos(X_8) + \\
 & + 9,77 \cdot \sin(X_2) \cdot \cos(X_2) \cdot \cos(X_3) \cdot \cos(X_4) \cdot X_5 \cdot \cos(X_6) - \\
 & - 2,60 \cdot 10^1 \cdot \cos^2(X_1) \cdot \sin(X_2) \cdot \sin^2(X_8) \cdot \cos(X_8) - \\
 & - 3,74 \cdot \sin^2(X_4) \cdot \sin(X_6) \cdot \cos^2(X_7) \cdot X_8
 \end{aligned} \tag{8}$$

Похибка розроблення математичного опису не перевищує 5,36 %.

$$\begin{aligned}
 Y_{\text{жиропрон.}} = & 2,12 + 1,9 \cdot 10^{-1} \cdot X_1 \cdot \cos(X_2) \cdot \cos^2(X_6) \cdot \cos(X_7) \cdot X_8 + \\
 & + 3,90 \cdot 10^{-2} \cdot X_2 \cdot \sin^2(X_3) \cdot \cos(X_3) \cdot \sin(X_4) \cdot X_5 - \\
 & - 8,60 \cdot \sin(X_6) \cdot X_7 \cdot \cos(X_8) \cdot \sin(X_8) + 1,61 \cdot \sin(X_1) \cdot \cos(X_2) \cdot \sin^2(X_3) + \\
 & + 1,37 \cdot 10^{-1} \cdot \cos(X_1) \cdot \cos(X_4) \cdot X_5 \cdot \cos(X_6) \cdot \sin(X_8) \cdot \cos(X_8)
 \end{aligned} \tag{9}$$

Похибка розроблення математичного опису не перевищує 4,34 %.

Ми в даній лекції не будемо акцентувати увагу на процесі дослідження моделей, а лише вкажемо, що отримані результати досліджень зведені у таблицю і узагальнюють результати пошуку умов виготовлення вказаних видів пакувальних матеріалів, а також дають можливість нам порівняти прогнозовані, проміжні та розраховані значення властивостей пакувальних матеріалів при певних значеннях факторів, за яких ці пакувальні матеріали можуть бути отримані.

У першій колонці таблиці для кожного виду пакувального матеріалу показані прогнозовані значення показників їх фізико-механічних властивостей.

Як видно з табл. 1, з метою забезпечення таких властивостей **пакувального матеріалу для вологовмісної продукції** пропонується взяти папір-основу зі щільністю 0,72 г/см³, повітропроникністю 9,0 см³/хв та поверхневою вбирністю води 64 г/м², а потім нанести суміш хімічних компонентів з розрахунку 2,0 г на 1 м² його поверхні, у водному розчині якого знаходиться 8 % компонента 1; 3 % компонента 2; 3 % компонента 3 та 0,3 % компонента 4.

Виконані розрахунки з використанням вищезазначених показників факторів та математичних моделей, дали проміжні результати.

Порівнюючи отримані результати з тими, які повинен мати пакувальний матеріал для пакування вологовмісної продукції, необхідно відмітити, що не всі параметри його властивостей задовольняються. Як видно з таблиці, наприклад, нижчими від запланованих виявилися такі показники, як руйнівне зусилля (18 Н замість ≥ 80 Н) та поверхнева вбирність води (21,5 г/см² замість ≥ 40 г/см²).

Таблиця 1 Значення показників фізико-механічних властивостей паперових пакувальних матеріалів

Показник	Значення показників пакувальних матеріалів								
	для вологовмісної продукції			для жировмісної продукції			для пакування виробів з карамелі		
	прогно- зовані	проміж- ні	розра- ховані	прогно- зовані	проміж- ні	розра- ховані	прогно- зовані	проміж- ні	розра- ховані
Руйнівне зусилля, Н	≥80	18	91	≥80	67	81	≥80	66	81
Відносне видовження (маш. напрям), %	≥2,4	2,62	3,3	≥2,4	3,8	3,8	≥2,8	2,8	2,9
Відносне видовження (попереч. напрям), %	≥4,2	7,56	8,9	≥4,2	6,2	7,1	≥6,8	6,8	10,3
Міцність на злам (маш. напрям), ч.п.п.	≥60	2890	7830	≥60	12900	12600	≥800	1500	11800
Міцність на злам (поперечний напрям), ч.п.п.	≥32	1880	1240	≥32	240	380	≥42	350	180
Вологоміцність, %	≥12	17	17,5	≥10	15,4	14,2	≥10	17,0	16,0
Повітропроникність, см ³ /хв	≤14	2,3	1,85	≤3	1,6	1,6	≤4	1,85	1,7
Поверхнева вбирність води, Кобб ₃₀ , г/м ²	≥40	21,5	46	≥25	21,0	20,4	≥25	11,0	11,0
Жиропроникність, мг	≤8	1,5	1,2	≤4	4,35	0,23	≤5,0	4,0	2,4
Фактор впливу	Значення факторів - умови виготовлення пакувального матеріалу								
		проміж- ні	розра- хункові		проміж- ні	розра- хункові		проміж- ні	розра- хункові
Щільність паперу-основи, г/см ³		0,72	0,72		0,85	0,85		0,80	0,80
Повітропроникність паперу-основи, см ³ /хв		9,0	7,0		6,0	3,5		6,0	4,2
Поверхнева вбирність води під час однобічного змочування паперу-основи (Кобб ₃₀), г/м ²		64,0	60,0		36,0	36,0		64,0	55,0
Масова частка розчину компонента 1, %		8,0	8,0		8,0	8,0		8,0	8,0
Масова частка розчину компонента 2, %		3,0	2,0		3,0	3,0		3,0	3,0
Масова частка розчину компонента 3, %		3,0	4,5		3,0	3,0		2,0	2,0
Масова частка розчину компонента 4, %		0,3	0,3		0,3	0,3		0,3	0,3
Витрата суміші хімічних речовин, г/м ²		2,0	2,0		4,0	4,0		5,0	5,0

Для забезпечення вимог стосовно показників, які виявилися нижчими від запланованих, необхідно скористатися інформацією, що була отримана під час проведення аналізу впливу факторів на властивості пакувальних матеріалів, та звернути увагу на фізичну інтерпретацію явищ, які описуються математичними

моделями. Так, наприклад, змінивши значення якісних показників паперу-основи, таких як повітропроникність (X_2) з 9,0 до 7,0 $\text{см}^3/\text{хв}$ та поверхнева вбирність води (X_3) з 64 до 60 $\text{г}/\text{м}^2$ і виконавши відповідні розрахунки на моделях, можна отримати показник руйнівного зусилля величиною 47 Н, а вбирності води пакувального матеріалу – 36 $\text{г}/\text{см}^2$ (у таблиці не знайшла відображення). Разом з тим, такий крок обґрунтований, тому що зменшення, наприклад, повітропроникності паперу-основи призводить до його ущільнення і, відповідно, до підвищення його міцнісних характеристик.

Наступним кроком була деяка зміна співвідношення компонентів суміші хімічних речовин, водний розчин яких наноситься на поверхню паперу-основи, таких як X_5 (компонент 2) з 3,0 до 2,0 % та X_6 (компонент 3) з 3,0 до 4,5 %, що дало можливість отримати розраховані значення, які вже практично відповідають прогнозованим даним. В даному випадку була використана інформація з попередніх досліджень, проведених в лабораторних умовах, а саме: введення до складу суміші добавок компонентів 2 та 3 сприяє не тільки зниженню показника жиропроникності, тобто підвищенню опору проходженню жиру у папір, але і підвищенню пластичності пакувального матеріалу, його механічної міцності, такого, наприклад, як руйнівне зусилля.

Таким чином, можна **зафіксувати умови (значення факторів у таблиці розрахункові), за якими властивості пакувального матеріалу для пакування вологовмісної продукції співпадають з прогнозованими.**

Вимоги до пакувального матеріалу для пакування жировмісної продукції також викладені у таблиці як прогнозовані значення.

Доречно пошук умов виготовлення такого пакувального матеріалу розпочати із значень факторів, що наведені в таблиці як проміжні значення. Тобто, пропонується для забезпечення прогнозованих характеристик пакувального матеріалу для жировмісної продукції взяти папір-основу зі щільністю - 0,85 $\text{г}/\text{см}^3$, повітропроникністю – 6,0 $\text{см}^3/\text{хв}$ та поверхневою вбирністю води – 36 $\text{г}/\text{м}^2$, а потім нанести склад із суміші хімічних компонентів з розрахунку 4,0 г на 1 м^2 його поверхні, у водному розчині якого знаходиться 8 % компонента 1; 3 % компонента 2; 3 % компонента 3 та 0,3 % компонента 4.

Результати попередніх розрахунків наведені у таблиці як проміжні значення властивостей пакувального матеріалу.

Якщо порівняти наведені результати з тими, які повинен мати пакувальний матеріал для пакування жировмісної продукції, то помітно, що не всі його показники задовольняються. Так, наприклад, трохи нижчим за прогнозоване

виявилося значення жиропроникності матеріалу (повинно бути ≤ 4 г), а також не задовольняє отримане значення показника руйнівного зусилля (67 Н замість ≥ 80 Н).

Для того, щоб забезпечити виконання умов, які не відповідають прогнозованим, необхідно використати інформацію, що була накопичена під час проведення аналізу впливу факторів на показники фізико-механічних характеристик, за якими розроблені математичні моделі, а також досвід, отриманий при розробленні пакувального матеріалу для вологовмісної продукції. Так, наприклад, зміна значення одного із показників якості паперу-основи, такого як повітропроникність (X_2) з 6,0 до 3,5 см³/хв, дало можливість знизити жиропроникність матеріалу до 0,23 мг та збільшити руйнівне зусилля до 81 Н. Обґрунтування такого кроку, як і у випадку з пакувальним матеріалом для вологовмісної продукції, наступне: зменшення повітропроникності паперу-основи призводить до його ущільнення і, відповідно, підвищує його міцнісні характеристики. Відповідно, ущільнення паперу-основи сприяє підвищенню опору проходження жиру у папір і забезпечує високий рівень жиронепроникності, що дуже важливо для пакувального матеріалу для пакування жировмісної продукції.

Таким чином, нами **отримані показники властивостей матеріалу близькі до прогнозованих при зміні значення лише одного фактору з однієї спроби.**

Вимоги до властивостей матеріалу для пакування виробів з карамелі також наведені в таблиці як прогнозовані значення.

Для їх забезпечення рекомендується взяти папір-основу зі щільністю 0,80 г/см³, повітропроникністю 6,0 см³/хв та поверхневою вбирністю води 64 г/м², а потім нанести суміш хімічних компонентів з розрахунку 5,0 г на 1 м² його поверхні, у водному розчині якого знаходиться 8 % компонента 1; 3 % компонента 2; 2 % компонента 3 та 0,3 % компонента 4.

Результати розрахунків, одержані за допомогою комп'ютера та математичних моделей, наведені у таблиці як проміжні значення.

Порівняння наведених результатів з тими, які повинен мати пакувальний матеріал для пакування виробів з карамелі, показує, що лише показник руйнівного зусилля не відповідає попереднім вимогам (66 Н замість ≥ 80 Н).

Для того, щоб його скорегувати, потрібно використати інформацію і досвід, що була отримані під час розроблення умов отримання пакувальних матеріалів для пакування волого- та жировмісної продукції.

Аналогічний крок зі зміною значень показників якості паперу-основи, таких як повітропроникність (X_2) - з 6,0 до 4,2 см³/хв та поверхнева вбирність води (X_3) - з 64 до 55 г/м², дав можливість підняти руйнівне зусилля до 81 Н і отримати пакувальний матеріал з властивостями, близькими до прогнозованих.

Акцентуючи увагу на отриманих результатах, необхідно зауважити, що параметри та технологічні умови виготовлення трьох видів пакувального матеріалу мають бути ретельно випробувані як в лабораторних, так і промислових умовах.

Висновки

Створення методології пошуку параметрів та технологічних умов з використанням комп'ютерних технологій потребувало вирішення певного комплексу задач, який включав:

- проведення серії експериментальних досліджень, в ході яких отримано інформаційний, іншими словами, цифровий макет досліджуваного об'єкта;
- розроблення математичних моделей на базі отриманих експериментальних даних.

Реалізація даної методології апробована під час пошуку параметрів фізико-механічних властивостей паперових пакувальних матеріалів для волого- і жировмісної продукції та виробів з карамелі.

Разом з тим, технологічні умови виготовлення трьох видів пакувального матеріалу мають бути ретельно випробувані як в лабораторних, так і промислових умовах.

Рекомендована література

1. Ивахненко А.Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. –Киев: Техника, 1975. – 312 с.
2. Ивахненко А.Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. –Киев: Наукова думка, 1982. – 296 с.
3. Клименюк О.В. Методологія та методи наукового дослідження: Навчальний посібник . К.: Міленіум, 2005. 186 с.
4. Шейко В., Кушнарєнко Н. Організація та методика науково-дослідницької діяльності: Підручник. –К.: Знання –Прес, 2003. –295 с.
5. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 272 с.