

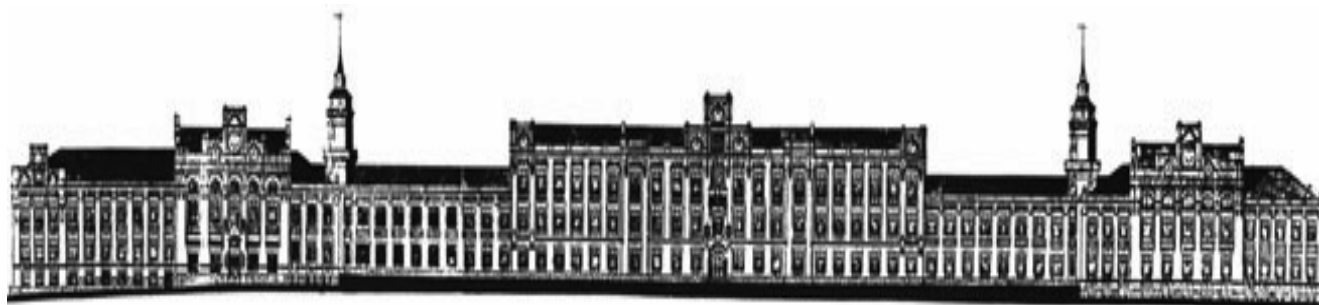
Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут"

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичної і самостійної роботи та виконання ДКР
для студентів напряму підготовки
6.051301 – "Хімічна технологія" спеціальностей 7.05130110 та 8.05130110
"Хімічні технології переробки деревини та рослинної сировини"

Затверджено Методичною радою ІХФ НТУУ "КПІ"



Київ
НТУУ "КПІ"
2012

Основи теорії похибок [Текст]: метод. вказівки до практичної і самостійної роботи та виконання ДКР студентів напряму підготовки 6.051301 –"Хімічна технологія" спеціальностей 7.05130110 та 8.05130110 "Хімічні технології переробки деревини та рослинної сировини"

Уклад.: Плосконос В.Г.

–К.: НТУУ "КПІ", 2012.– 51 с.

Гриф надано Методичною радою ІХФ НТУУ "КПІ"
(Протокол № від 26.10.2012 р.)

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичної і самостійної роботи та виконання ДКР

для студентів напряму підготовки

6.051301 – "Хімічна технологія" спеціальностей 7.05130110 та 8.05130110

"Хімічні технології переробки деревини та рослинної сировини"

Укладач: В.Г.Плосконос, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний М.Д.Гомеля, д-р техн. наук, проф.
редактор

Рецензент: Степанюк Андрій Романович, канд. техн. наук, доцент.

ЗМІСТ	стор.
Вступ	4
1. Загальні положення	5
2. Навчальна програма курсу	7
3. Основні теоретичні аспекти дисципліни	10
3.1 Фізичні величини. Принципи і методи їх вимірювання.....	10
3.2 Вимірювання та їх похибки	12
3.3 Основи теорії похибок. Відмінність між результатами вимірювань. Порівняння двох виміряних значень	13
3.4 Відносні похибки. Множення двох виміряних значень	14
3.5 Похибки в непрямих вимірюваннях	15
3.6. Розрахунок похибок задовільної функції та крок за кроком.....	17
3.7. Загальна формула для розрахунку похибок в непрямих вимірюваннях	18
4. Приблизна тематика практичних занять	19
5. Приклади розв'язання задач	20
6. Загальні положення щодо самостійної роботи студентів	43
7. Організація контрольних заходів самостійної роботи студентів	45
8. Приклад виконання самостійної роботи	46
Список літератури	50

ВСТУП

Методичні вказівки розроблено для студентів напряму підготовки 6.051301 – "Хімічна технологія" спеціальностей 7.05130110 та 8.05130110 "Хімічні технології переробки деревини та рослинної сировини", для яких з дисципліни "ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК" проводяться практичні заняття, студенти виконують домашню контрольну роботу (ДКР) у відповідності з отриманим завданням, та самостійно працюють над матеріалом для поглиблення своїх знань.

Після практичних занять та виконання ДКР студентам стане зрозумілим, що результати всіх вимірювань, як би ретельно вони не готувались і на якому б самому високому науковому рівні вони не проводились, завжди супроводжуються певними неточностями.

Теорія похибок- це наука, яка займається вивченням та оцінкою похибок.

Ці дві функції (а саме: вивчення (або дослідження) та оцінка) дозволяють науковцю (експериментатору, студенту-експериментатору) визначити, настільки великі похибки в його дослідженнях та допомагають зменшити їх, коли це видається можливим.

Методичними вказівками передбачено, що всі розрахунки виконуються без використання персональних комп'ютерів, що залишає студентам місце для творчого підходу в процесі розрахунку похибок.

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Точні науки, які є основною рушійною силою науково-технічного прогресу та розвитку суспільства, потребують достовірної та адекватної інформації для свого розвитку. Тому вимірювання відіграють особливо важливу роль у всіх галузях техніки, постачаючи вихідну інформацію для всіх видів наук.

Курс "Основи теорії похибок" належить до циклу дисциплін за вільним вибором студентів професійної і є теоретичною та практичною основою для підготовки спеціалістів та магістрів за напрямком підготовки 6.051301 "Хімічна технологія", спеціальності 7.05130110 та 8.05130110 "Хімічні технології переробки деревини та рослинної сировини".

Згідно з ОКХ курс "Основи теорії похибок" формує відповідну **компетенцію**, а саме:

- базові уявлення про фізичні величини та основні принципи і методи вимірювання фізичних величин;
- базові уявлення про основні положення теорії похибок та використання їх в процесі проведення експериментальних досліджень;
- базові уявлення про принципи та закономірності статистичного аналізу багаторазових вимірювань з випадковими похибками хіміко-технологічних процесів та вплив отриманих результатів на показники якості і властивості продукції;
- знання і застосування на практиці основ і принципів нормального розподілу випадкових величин в процесі створення екологічно чистих виробництв та для використання в обраній професії.

Тому **метою** курсу "Основи теорії похибок" є професійна підготовка, формування та прищеплення студентам здатності використовувати професійно профільовані знання в галузі теорії похибок в процесі проведення експериментальних досліджень та моделювання процесів перероблення рослинної сировини під час виконання наукової роботи, а також для управління існуючими технологічними процесами виробництва паперу та картону і удосконалення цих процесів та створення нових більш ефективних, екологічно чистих виробництв, які дозволяють раціонально використовувати дефіцитні волокнисті напівфабрикати, воду, допоміжні хімічні матеріали.

Згідно з ОПП змістом **уміння**, що забезпечується, є:

- вміти використовувати математичний апарат теорії похибок з метою статистичної обробки результатів вимірювання фізичних величин в процесі дослідження процесів виробництва паперу та картону;
- вміти використовувати сучасні досягнення в галузі теорії похибок з метою проведення експериментальних досліджень з мінімальними похибками;

- користуватись теоретичними положеннями нормального закону розподілу випадкових величин та відповідним математичним апаратом теорії похибок для обґрунтування довірчого інтервалу процесів, що досліджуються в умовах лабораторії або під час виробництва, та розрахунку оптимальних умов технології виробництва целюлозно-паперової продукції.

Студент, який закінчив вивчення цієї дисципліни, **здатен:**

§ використовуючи наукові теорії похибок, обрати умови проведення експериментальних досліджень в лабораторії (виробництві) з мінімальними можливими похибками;

§ використовуючи теоретичні основи теорії похибок та статистичної обробки результатів вимірювань під час дослідження складного об'єкта з предметної галузі технології переробки волокнистих напівфабрикатів, вміти обґрунтувати формули розрахунку похибок на базі нормального закону розподілу випадкових величин;

§ використовуючи лабораторне (промислове) обладнання та методики виконання експериментальних досліджень, провести статистичний аналіз багаторазових вимірювань з випадковими похибками;

§ використовуючи теоретичні основи нормального закону розподілу випадкових величин та відповідного математичного апарату теорії похибок, обґрунтувати довірчий інтервал процесів, що досліджуються в умовах лабораторії або під час виробництва, і зробити відповідні висновки.

2. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА КУРСУ

Розділ 1. Фізичні величини та похибки під час їх вимірювання

Тема 1.1 Фізичні величини. Принципи і методи вимірювань фізичних величин

Вимірювані фізичні величини. Принципи та методи вимірювань фізичних величин. Основні поняття теорії ймовірностей та статистики.

Література: [1, 2, 16]

Питання, що виносяться на СРС:

Системи фізичних величин та їх одиниць. Показники точності та форми подання результатів вимірювання.

Література: (1 с.50-54; 2 с.14-35; 16)

Тема 1.2 Попереднє знайомство з теорією похибок

Помилки – як похибки. Неминучість похибок. Як важливо знати похибки. Оцінка похибки при відліку зі шкали. Оцінка похибок у випадку багаторазових прямих вимірювань.

Література: [2, 3]

Питання, що виносяться на СРС:

Загальні положення та класифікація похибок. Точкові характеристики похибок. Інтервальні характеристики похибок.

Література: (2 с.69-81)

Тема 1.3 Основні положення теорії похибок

Найкраща оцінка $\pm$ похибка. Значущі цифри при визначенні похибок. Відмінність між результатами вимірювань. Порівняння двох значень: виміряного і теоретично відомого. Порівняння двох виміряних значень. Відносні похибки. Значущі цифри у відносних похибках. Множення двох виміряних значень.

Література: [1, 2, 3, 4, 5, 12]

Питання, що виносяться на СРС:

Класифікація похибок вимірювань. Вплив систематичних похибок на результати вимірювань. Перевірка пропорційності за допомогою графіка.

Література: (4 с.17-24; 8 с.33-44; 3 с. 34-38)

Тема 1.4 Похибки в непрямих вимірюваннях

Похибки суми та різниці виміряних величин. Похибки при множенні та діленні виміряних величин. Похибки при множенні виміряної величини на точне число. Похибки при піднесенні виміряної величини до ступеня. Незалежні похибки при обчисленні суми виміряних величин. Узагальнюючі формули розрахунку суми, різниці, добутку і частки виміряних величин при незалежних похибках. Похибки при використанні задовільної функції однієї змінної. Метод розрахунку похибки "крок за кроком". Загальна формула для розрахунку похибок в непрямих вимірюваннях.

Література: [1, 2, 3, 5, 8]

Питання, що виносяться на СРС:

Загальні відомості про похибки в непрямих вимірюваннях. Розуміння похибок в непрямих вимірюваннях на прикладах. Принцип арифметичної середини.

Література: (2 с.100-120; 3 с.49-61, 65-72, 73-78; 5 с.50-54)

Розділ 2 Методи статистичного аналізу випадкових похибок

Тема 2.1 Статистичний аналіз багаторазових вимірювань з випадковими похибками

Випадкові та систематичні похибки. Середнє значення і стандартне відхилення. Стандартне відхилення – як похибка одиничного виміру. Стандартне відхилення середнього. Систематичні похибки для експериментальних досліджень в учбових лабораторіях.

Література: [1, 2, 3, 5, 6, 8]

Питання, що виносяться на СРС:

Визначення гарантійного інтервалу результатів вимірювань. Підсумовування похибок вимірювань. Похибки прямих рівноточних вимірювань. Обробка і оцінка точності рівноточних вимірювань. Стандартне відхилення середнього на прикладах.

Література: (2 с.103-118; 3 с. 98-101; 8 с. 33-46)

Розділ 3. Обґрунтування та перевірка закону розподілу випадкових величин

Тема 3.1 Нормальний розподіл статистичної величини

Гістограми і розподіл випадкових величин. Граничний розподіл випадкових величин. Нормальний розподіл випадкової величини.

Література: [1, 3, 6]

Питання, що виносяться на СРС:

Закон розподілу ймовірностей при багаторазових вимірюваннях. Випадкові величини. Використання елементів теорії ймовірностей до результатів вимірювань. Повторення випробувань – біноміальний розподіл.

Література: (1 с.5-26; 6 с. 88- 115)

Тема 3.2 Обґрунтування формул розрахунку похибок на базі закону нормального розподілу

Стандартне відхилення як 68% довірчий інтервал. Обґрунтування середнього $\bar{x}$ як найкращої оцінки та S - ширини граничного розподілу. Обґрунтування розрахунку похибок в непрямих вимірюваннях. Обґрунтування стандартного відхилення середнього.

Література: [1, 3, 6, 12]

Питання, що виносяться на СРС:

Квадратична сума похибок і її обґрунтування. Загальний випадок. Визначення середньої квадратичної похибки.

Література: (1 с.120-130; 3 с.125-142; 6 с.100-137)

Тема 3.3 Розрахунок та обґрунтування довірчого інтервалу

Розрахунок та обґрунтування довірчого інтервалу.

Література: [1, 3, 5, 14]

Питання, що виносяться на СРС:

Довірчі інтервали. Необхідна кількість вимірювань випадкової величини.

Література: (1 с.50-54; 3 с.15-24; 14 с. 55-67)

Тема 3.4 Проблема відсіювання та об'єднання результатів вимірювань

Проблема відсіювання даних. Критерій Шовене. Проблема об'єднання результатів різних вимірювань.

Література: [1, 3]

Питання, що виносяться на СРС:

Проблема відсіювання даних з використанням критерію Шовене на прикладах. Проблема об'єднання результатів різних вимірювань на прикладах.

Література: (1 с.122-136; 3 с.148-158)

Тема 3.5 Критерій χ^2 для граничних розподілів

Поняття критерію χ^2 . Ступені свободи і приведені значення χ^2 . Ймовірності для χ^2 .

Література: [1, 3, 6]

Питання, що виносяться на СРС:

Коефіцієнт лінійної кореляції. кількісний критерій значимості r .

Література: (1 с.50-54; 3 с.184-192)

Розділ 4. Точність вимірювань на базі невизначеності

Тема 4.1 Методи оцінювання точності вимірювань на основі поняття невизначеності

Загальні поняття і визначення *поняття невизначеності*. Приклад оцінювання характеристик похибки та розрахунок невизначеності вимірювань. Порівняльний аналіз двох підходів до визначення характеристик точності вимірювань.

Література: [7]

Питання, що виносяться на СРС:

Порівняльний аналіз двох підходів до визначення характеристик точності вимірювань.

Література: (7 с.6-20)

3. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ ДИСЦИПЛІНИ

3.1 Фізичні величини . Принципи і методи їх вимірювання

Кожну означену якісно властивість фізичних об'єктів (фізичних тіл, їх систем, станів, процесів), яка може мати певний розмір називають **фізичною величиною** (або скорочено - ФВ).

Прикладами ФВ є: довжина, маса, швидкість, прискорення, сила електричного струму чи опору, магнітна індукція, світловий потік тощо.

Розмір ФВ існує об'єктивно і незалежно від того, що ми про нього знаємо.

Значення ФВ, яке настільки близьке до істинного її значення, що для заданих умов може бути використане замість нього, називають дійсним значенням ФВ.

Вимірювання — це знаходження значень ФВ дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів, які зберігають одиницю ФВ та дають змогу порівняти з нею вимірювану ФВ.

За способом отримання інформації (вимірюваних сигналів) розрізняють **прямі, посередні (непрямі), сукупні та сумісні вимірювання**.

Прямі вимірювання — це безпосереднє порівняння ФВ з її одиницею (мірою).

Посередні (непрямі) вимірювання полягають в тому, що значення вимірюваної ФВ знаходять за допомогою залежності від ФВ, які отримують прямими вимірюваннями. Посередні вимірювання застосовують тоді, коли безпосереднє вимірювання ФВ неможливе чи недоцільне.

Сукупні вимірювання вимагають розв'язування системи рівнянь, складених за результатами одночасних вимірювань декількох однорідних ФВ.

Сумісні вимірювання полягають у вимірюванні двох і більше однорідних ФВ для встановлення залежностей між ними.

Експериментатор отримує результати спостережень, які можуть бути однократними або багатократними.

Вони можуть стати результатами вимірювання, як значення ФВ, тільки після відповідного їх оброблення з визначенням точності та форми подання цього результату.

Результат вимірювання — це знайдене значення вимірюваної ФВ із стандартною оцінкою його точності.

Точність визначається характеристиками похибки вимірювань.

Принципом вимірювання називають сукупність явищ, які використовують для цього.

Метод вимірювання — це спосіб використання принципів і засобів вимірювання.

Методика виконання вимірювань — сукупність процедур і правил, виконання яких забезпечує одержання результатів вимірювань з заданою точністю.

3.2 Вимірювання та їх похибки

Теорія похибок – це вивчення і оцінка похибок у вимірюваннях.

Похибки можуть бути результатом недосконалості як методики вимірювання, так і міри.

Таким чином, результат вимірювання не співпадає зі справжнім (істинним) значенням вимірювальної величини, а відображає лише її оцінку

Точність вимірювання відображає наближення результату до справжнього (істинного) значення вимірювальної величини.

Різниця між результатом вимірювання та істинним значенням називається **похибкою**.

Похибки можливо розділити на три класи:

- до першого класу належать систематичні похибки, які залишаються незмінними або такими, що закономірно змінюють своє значення. До них відносяться, наприклад, похибки виготовлення або градування самої міри. Зігнута стрілка вольтметра – приклад систематичної похибки.

- до другого класу похибок відносяться випадкові похибки. Причини їх виникнення невідомі. В результаті дії випадкових факторів ми не можемо, наприклад, впевнено знати результат вимірювання, знаючи попереднє значення. Дія цих випадкових факторів призводить до того, що відхилення результату від його істинного значення носить статистичний, ймовірний характер.

До метрологічних характеристик точності вимірювань, зв'язаних з випадковими похибками, відносяться сходження і відтворення результатів.

Сходження відображає (показує) близькість одне до одного результатів вимірювання, виконаних в ідентичних умовах.

Відтворення вимірювань відображає (показує) близькість одне до одного результатів вимірювання, виконаних в різних місцях, різними методами.

Сукупність таких метрологічних характеристик, як: **правильність, сходження і відтворення** визначає **точність вимірювання**.

- третій клас похибок носить назву грубих похибок або промахів. Різке порушення умов вимірювання, неправильний запис в протоколі, поломка приладу під час проведення експерименту тощо призводять до появи цих похибок.

Одна із задач статистики - визначення промахів на фоні інших випадкових відхилень.

3.3 Основи теорії похибок. Відмінність між результатами вимірювань. Порівняння двох виміряних значень

Якщо два вимірювання однієї і тієї ж величини вирізняються, то ми будемо говорити, що між ними є відмінність.

Чисельно визначимо відмінність між двома вимірюваннями як їх різниця:

відмінність = різниця між двома виміряними значеннями однієї і тієї ж величини.

Відмінність може бути значимою або незначимою.

Наприклад, якщо два студента вимірюють один і той же опір і отримують результати

$$40 \pm 5 \text{ Ом}$$

і

$$42 \pm 8 \text{ Ом},$$

то відмінність в 2 Ом менше, ніж похибки їх результатів, так що два ці вимірювання, зазвичай, узгоджуються. В цьому випадку ми б сказали, що **відмінність є незначимою**.

З іншого боку, якщо два результати були б

$$35 \pm 2 \text{ Ом}$$

і

$$45 \pm 1 \text{ Ом},$$

то виявилось би, що два вимірювання явно розходяться, і **відмінність в 10 Ом є значимою**.

В багатьох експериментах доводиться вимірювати два значення, які, у відповідності з певною теорією, повинні бути рівними.

При рівності двох значень, різниця між ними має дорівнювати нулю.

Правило похибки різниці результатів вимірювань
Якщо величини x і y виміряні з похибками Δx і Δy і якщо виміряні значення x і y використовуються для розрахунку різниці $q = x - y$, то похибка в q є сума похибок в x і y:
$\Delta q \approx \Delta x + \Delta y$

3.4 Відносні похибки. Множення двох виміряних значень

Похибка Δx під час вимірювання

$$(\text{виміряне значення } x) = x_{\text{найкращ.}} \pm \Delta x.$$

показує надійність або точність вимірювання.

Якість вимірювання характеризується не тільки самою похибкою Δx , але також і *відношенням* величини Δx до $x_{\text{найкращ.}}$. І ця обставина змушує нас розглядати **відносну похибку**, яку ми будемо позначати δ_x .

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{|x_{\text{найкращ.}}|}$$

Відносна похибка також зветься **точністю**.

Для того, щоб уникнути непорозумінь з відносною похибкою, саму похибку Δx інколи називають **абсолютною похибкою**.

Як правило, в більшості серйозних вимірювань похибка Δx набагато менше вимірюваної величини $x_{\text{найкращ.}}$.

Оскільки при цьому відносна похибка $\delta_x = \frac{\Delta x}{|x_{\text{найкращ.}}|}$ представляє собою зазвичай мале число, часто зручно помножити її на **100 і** надавати як похибку у відсотках.

Потрібно звернути увагу на те, що, в той час як абсолютна похибка Δl вимірюється в тих же одиницях, що і l , то відносна похибка $\delta_l = \frac{\Delta l}{|l_{\text{найкращ.}}|}$ є безрозмірною величиною.

Врахування цієї різниці допоможе нам уникнути частих помилок, коли плутають абсолютну похибку з відносною.

Відносна похибка - наближено характеризує якість вимірювань незалежно від значення величини, що вимірюється.

Найбільш важлива особливість в розумінні відносної похибки проявляється під час перемноження виміряних значень одне на одне.

Правило розрахунку похибки здобутку результатів вимірювань

Якщо величини x і y виміряні з малими відносними похибками $\Delta x/x_{\text{найкращ.}}$ і $\Delta y/y_{\text{найкращ.}}$ і якщо виміряні значення x і y використовуються для розрахунку результату множення $q = x * y$, то відносна похибка q дорівнює сумі відносних похибок x і y :

$$\delta_q \approx \delta_x + \delta_y$$

3.5 Похибки в непрямих вимірюваннях

3.5.1 Похибки суми та різниці величин

Правило похибки суми або різниці результатів вимірювань
Якщо декілька величин $x, \dots, w$, виміряні з похибками $\Delta x, \dots, \Delta w$ і використовуються для розрахунку $q = x + \dots + z - (u + \dots + w)$, то похибка в розрахованій величині q є сума $\Delta q \approx \Delta x + \dots + \Delta z + \dots + \Delta w$ всіх вихідних похибок.

3.5.2. Похибки під час множення та ділення вимірюваних величин

Похибки добутку і ділення результатів вимірювань
Якщо декілька величин $x, \dots, w$ виміряні з малими похибками $\Delta x, \dots, \Delta w$ і якщо виміряні значення використовуються для розрахунку $q = \frac{x * \dots * z}{u * \dots * w}$ то відносна похибка розрахованої величини q дорівнює сумі : $\delta_q \approx \delta_x + \dots + \delta_z + \delta_u + \dots + \delta_w$

3.5.3 Похибки під час множення вимірюваної величини на точне число

Похибки добутку результату вимірювань <u>на точне число</u>
Якщо величина x вимірюється з похибкою Δx і використовується для розрахунку добутку $q = B * x$, в якому <u>B не має похибки</u> , то похибка в q дорівнює : $\Delta q = B * \Delta x$

5.4 Похибки при піднесенні вимірюваної величини до ступеня

Похибка <u>при піднесенні до степеня</u>
Якщо величина x вимірюється з похибкою Δx і виміряне значення використовується для розрахунку ступеня цього числа $q = x^n$, то відносна похибка в q в n раз більша відносною похибки в x : $\delta_q = n * \delta_x$

3.5.5 Незалежні похибки при обчисленні суми вимірюваних величин

Якщо виміри x і y проводяться незалежно і якщо вони обоє підкоряються нормальному розподілу, то похибка в $q = x + y$ надається виразом:

$$\Delta q = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} .$$

Таким чином, якщо виміри x і y незалежні і піддаються тільки випадковим похибкам, то похибка в розрахованому значенні $q = x + y$ дорівнює сумі квадратично складених похибок Δx і Δy , або їхній квадратичній сумі.

Якщо у нас є які-небудь підстави підозрювати, що похибки в x і y не незалежні та випадкові (як у прикладі з виміром сталевою рулеткою), то використання нами квадратичної суми (3) для Δq не буде виправданим.

З іншого боку, межа (4) гарантує, що Δq однозначно не більше, ніж $\Delta x + \Delta y$, і більше надійним буде використання старого правила

$$\Delta q \approx \Delta x + \Delta y.$$

3.5.6 Узагальнюючі формули розрахунку суми, різниці, добутку і частки вимірених величин при незалежних похибках

Похибки суми або різниці результатів вимірювань
Припустимо, що величини $x, \dots, w$, виміряні з похибками $\Delta x, \dots, \Delta w$ і використовуються для розрахунку $q = x + \dots + z - (u + \dots + w)$. Якщо відомо, що похибки в $x, \dots, w$ незалежні і випадкові, то похибка в q є квадратичною сумою: $\Delta q = \sqrt{(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta y)^2 + (\Delta u)^2 + \dots + (\Delta w)^2} \quad \text{вихідних похибок.}$ В будь-якому випадку Δq не більше, ніж звичайна сума $\Delta q \leq \Delta x + \dots + \Delta z + \dots + \Delta w.$
Похибки в добутку і частці результатів вимірювань
Припустимо, що величини $x, \dots, w$, виміряні з похибками $\Delta x, \dots, \Delta w$ і використовуються для розрахунку $q = \frac{x * \dots * z}{u * \dots * w}.$ Якщо похибки в $x, \dots, w$ незалежні і випадкові, то відносна похибка в q є квадратичною сумою вихідних відносних похибок: $\delta_q = \sqrt{(dx)^2 + \dots + (dz)^2 + (du)^2 + \dots + (dw)^2}.$ В будь-якому випадку δ_q ніколи не більше, ніж їх звичайна сума: $\delta_q \leq \delta_x + \dots + \delta_z + \delta_u + \dots + \delta_w$

3.6 Розрахунок похибок задовільної функції та крок за кроком

3.6.1 Похибки при використанні задовільної функції однієї змінної

Похибки в задовільній функції однієї змінної
Якщо величина x виміряна з похибкою Δx і використовуються для розрахунку функції $q(x)$, то похибка Δq дорівнює: $\Delta q = \left \frac{\partial q}{\partial x} \right * \Delta x.$

3.6.2 Метод розрахунку похибки "крок за кроком"

Маючи достатній **набір правил**, можливо впоратися майже з будь-яким завданням **обчислення похибок у випадку непрямих вимірювань**.

Будь-який розрахунок може бути представлений як послідовність із кроків, кожний з яких включає тільки один з наступних видів операцій:

- 1) знаходження суми і різниці;
- 2) розрахунок добутків і часток;
- 3) обчислення функції одного змінного, наприклад x^n , $\sin x$, e^x або $\ln x$.

Так, наприклад, для розрахунку $q = x * (y - z * \sin u)$

за виміряними значеннями x, y, z і u потрібно провести таку послідовності кроків:

- обчислення функції $\sin u$, потім розрахунок добутку $z * \sin u$, потім
- визначення різниці $(y - z * \sin u)$ і, нарешті, добутку $x * (y - z * \sin u)$.

Ми знаємо, як обчислюються похибки для кожної із цих окремих операцій.

Таким чином, за умови, що всі величини, з якими ми маємо справу, **незалежні**, ми можемо обчислити похибку кінцевого результату в серії послідовних кроків, виходячи з похибок у вихідних вимірюваннях.

3.7 Загальна формула для розрахунку похибок в непрямих вимірюваннях

Похибка функції декількох змінних
Припустимо, що $x, \dots, z$, виміряні з похибками $\Delta x, \dots, \Delta z$ і що виміряні значення використовуються для розрахунку функції $q = f(x, \dots, z)$. Якщо похибки в $x, \dots, z$ незалежні і випадкові, то похибка в q дорівнює: $\Delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial q}{\partial z} \Delta z\right)^2}.$ В будь-якому випадку Δq не більше, ніж звичайна сума $\Delta q \leq \left \frac{\partial q}{\partial x} \right * \Delta x + \dots + \left \frac{\partial q}{\partial z} \right * \Delta z.$

4. ПРИБЛИЗНА ТЕМАТИКА ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Мета практичних занять з курсу полягає у поглибленні теоретичних знань і набутті практичних навичок у визначенні похибок під час виконання наукових досліджень в експериментальних лабораторіях.

Студенти в рамках практичних занять вирішують задачі та виконують розрахунки похибок під час проведення індивідуальних або комплексних наукових досліджень.

Приблизний перелік тем науково-дослідних робіт наведений нижче:

Аналіз варильних розчинів. Варіння целюлози сульфїтним способом. Промивання та сортування отриманої целюлози.

Аналіз варильних розчинів. Варіння целюлози сульфатним способом. Промивання та сортування отриманої целюлози .

Визначення жорсткості отриманої целюлози за методами Б"єркмана і Капа .

Аналіз вибілювальних реагентів. Вибілювання целюлози.

Аналіз відпрацьованих щолоків.

Розмелювання напівфабрикатів та визначення якісних показників маси, що розмелюється (ступеня млива та масового показника середньої довжини волокна, фракційного складу маси).

Варіння різних видів і типів крохмального клею та проклеювання паперової маси з різним ступенем млива і витратою клею.

Варіння різних видів і типів крохмального клею та виконання поверхневого проклеювання відливків, що виготовлені з паперової маси з різним ступенем млива з варіюванням витрати клею.

Виготовлення лабораторних зразків паперу та картону (відливків).

Фізико-механічні випробування відливок (визначення розривної довжини, опору продавлюванню, міцності на злом під час багаторазових перегинах, опору роздиранню, поверхневої вбирності за методом Кобба, опору площинному та торцевому стисненню і т.ін.).

Аналіз стічної води різними методами .

5. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

5.1 Застосувати формулу розрахунку відносної похибки (у відсотках) для п'яти вимірювань:

- виміряна висота = $5,03 \pm 0,04$ м;
- вимірний час = $19,5 \pm 1$ с;
- вимірний заряд = $(-3,2 \pm 0,3) \cdot 10^{-19}$ Кл);
- виміряна довжина хвилі = $(0,56 \pm 0,07) \cdot 10^{-6}$ м);
- вимірний імпульс = $(3,27 \pm 0,04) \cdot 10^3$ г*см/с).

Рішення задачі:

- виміряна висота: відносна похибка $\delta_x = \frac{\Delta x}{|x_{\text{найкращ.}}|} = \frac{0,04}{|5,03|} * 100 = 0,8\%$;

Відповідь. ($5,03 \text{ м} \pm 0,8 \%$);

- вимірний час: відносна похибка $\delta_x = \frac{\Delta x}{|x_{\text{найкращ.}}|} = \frac{1}{|19,5|} * 100 = 5,1\%$;

Відповідь. ($19,5 \text{ с} \pm 5,1\%$);

- вимірний заряд: відносна похибка $\delta_x = \frac{\Delta x}{|x_{\text{найкращ.}}|} = \frac{0,3}{|3,2|} * 100 = 9,4\%$;

Відповідь. ($-3,2 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \pm 9,4 \%$);

- виміряна довжина хвилі: відносна похибка $\delta_x = \frac{\Delta x}{|x_{\text{найкращ.}}|} =$

$\frac{0,07}{|0,56|} * 100 = 12,5\%$; ($0,56 \cdot 10^{-6} \text{ м} \pm 12,5 \%$);

- вимірний імпульс: відносна похибка $\delta_x = \frac{\Delta x}{|x_{\text{найкращ.}}|} = \frac{0,04}{|3,27|} * 100 = 1,22\%$;

Відповідь. ($3,27 \cdot 10^3 \text{ г*см/с} \pm 1,22 \%$).

5.2 Припустимо, що ми хочемо виміряти довжину 2 см з точністю 1%. З допомогою дерев'яної лінійки можна провести відлік з точністю до 1мм, а з допомогою мікроскопа – до 0,1 мм. Чи можливо це зробити з допомогою дерев'яної лінійки? З допомогою мікроскопа?

Рішення задачі:

а) відносна похибка (дерев'яної лінійки):

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{|x_{\text{найкращ.}}|} = \frac{1}{|20|} * 100 = 5\%;$$

а) відносна похибка (мікроскопа):

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{|x_{\text{найкращ.}}|} = \frac{0,1}{|20|} * 100 = 0,5\%.$$

Відповідь. Зважаючи на те, що відносна похибка для дерев'яної лінійки становить 5%, а для мікроскопа – 0,5%, то з точністю 1% довжину 2 см можна виміряти з допомогою мікроскопа.

5.3 Вимірюються дві величини a і b (довжина та ширина паперової смужки для випробування на міцність). Отримуємо: $a=11,5\pm0,2$ см і $b=25,4\pm0,2$ см.

Потрібно розрахувати значення площі смужки $S=a*b$, абсолютне та відносне значення похибки в S , а також відносне значення похибок вимірюваних величин ?

Рішення задачі:

$$S_{\text{найкращ.}} = a_{\text{найкращ.}} * b_{\text{найкращ.}} = (11,5) * 25,4 = 292,1 \text{ см}^2.$$

$$\text{Відносна похибка (вимір. } a) \delta_a = \frac{\Delta a}{|a_{\text{найкращ.}}|} = \frac{0,2}{|11,5|} * 100 = 1,74 \%;$$

$$\text{Відносна похибка (вимір. } b) \delta_b = \frac{\Delta b}{|b_{\text{найкращ.}}|} = \frac{0,2}{|25,4|} * 100 = 0,79 \%.$$

$$\text{Відносна похибка в } S \delta_S = \delta_a + \delta_b = 1,74\% + 0,79\% = 2,53\%.$$

Якщо потрібно узнати абсолютну похибку в S , необхідно перемножити отримане число на $S_{\text{найкращ.}}$:

$$\Delta S = \delta_S * S_{\text{найкращ.}} = 0,0253 * 292,1 = 7,42 \text{ см}^2.$$

Потім, заокругляючи ΔS і $S_{\text{найкращ.}}$, одержуємо остаточний результат: (значення S) = $(292 \pm 7) \text{ см}^2$ або $S = (292 \text{ см}^2 \pm 3\%)$.

Відповідь. $S = (292 \pm 7) \text{ см}^2$ або $S = (292 \text{ см}^2 \pm 3\%)$.

5.4 Обґрунтувати використання поняття відносної похибки у формулі розрахунку похибки здобутку ($q=x*y$) двох вимірюваних величин: x і y , для яких отримано значення: $x=10\pm1$ см і $y=20\pm1$ см. А також використовуючи найбільше ймовірне значення для x і y (в даному випадку: 11 і 21), розрахуйте найбільше ймовірне значення для q ? Аналогічно потрібно знайти найменше ймовірне значення для q і, відповідно, інтервал, в якому ймовірно лежить q ? Потрібно також порівняти отриманий результат з тим, що дає правило похибок здобутку двох величин.

Рішення задачі:

$$(\text{виміряне значення } x) = x_{\text{найкращ.}} \pm \Delta x = 10 \pm 1 \text{ см};$$

$$(\text{виміряне значення } y) = y_{\text{найкращ.}} \pm \Delta y = 20 \pm 1 \text{ см};$$

$$q_{\text{найкращ.}} = x_{\text{найкращ.}} * y_{\text{найкращ.}} = (10) * 20 = 200 \text{ см}^2.$$

Найбільше ймовірне значення вимірюваної величини:

$$x = x_{\text{найкращ.}} + \Delta x = 10 + 1 = 11;$$

Найбільше ймовірне значення вимірюваної величини:

$$y = y_{\text{найкращ.}} + \Delta y = 20 + 1 = 21;$$

Найменше ймовірне значення вимірюваної величини:

$$x = x_{\text{найкращ.}} - \Delta x = 10 - 1 = 9;$$

Найменше ймовірне значення вимірюваної величини:

$$y = y_{\text{найкращ.}} - \Delta y = 20 - 1 = 19;$$

$$\text{Найбільше ймовірне значення для } q_{\text{найб.}} = 11 * 21 = 231;$$

Найменше ймовірне значення для $q_{\text{найм.}} = 9 \cdot 19 = 171$;
Інтервал, в якому лежить ймовірно лежить q : 171-231;

У відповідності з правилом похибки здобутку результатів вимірювань :

$$\text{Відносна похибка (вимір. } x) \delta_x = \frac{\Delta x}{|x_{\text{найкращ.}}|} = \frac{1}{|10|} * 100 = 10 \%;$$

$$\text{Відносна похибка (вимір. } y) \delta_y = \frac{\Delta y}{|y_{\text{найкращ.}}|} = \frac{1}{|20|} * 100 = 5 \%.$$

Відносна похибка в q є сума $= 10\% + 5\% = 15\%$.

Якщо необхідно узнати абсолютну похибку в q , необхідно перемножити отримане число на $S_{\text{найкращ.}}$:

$$\Delta S = \delta_S * S_{\text{найкращ.}} = 0,15 * 200 = 30 \text{ см}^2.$$

Отже: (Значення q) = $q_{\text{найкращ.}} \pm \Delta q = 200 \pm 30 \text{ см}^2$;

Відповідь. Розрахований інтервал, в якому лежить ймовірно лежить q : = 171-231 добре узгоджується з інтервалом, розрахованим у відповідності з ф-лою: (Значення q) = $q_{\text{найкращ.}} \pm \Delta q = 200 \pm 30 \text{ см}^2$. (Правило вимагає, щоб величини x і y вимірювалися з малими відносними похибками).

5.5 Обґрунтувати використання поняття відносної похибки у формулі розрахунку похибки здобутку ($q = x \cdot y$) двох вимірюваних величин: x і y , для яких отримано значення: $x = 10 \pm 8 \text{ см}$ і $y = 20 \pm 15 \text{ см}$. А також використовуючи найбільше ймовірне значення для x і y (в даному випадку: 18 і 35), розрахуйте найбільше ймовірне значення для q ? Аналогічно потрібно знайти найменше ймовірне значення для q і, відповідно, інтервал, в якому ймовірно лежить q ? Потрібно також порівняти отриманий результат з тим, що дає правило похибок здобутку двох величин.

Рішення задачі:

$$(\text{виміряне значення } x) = x_{\text{найкращ.}} \pm \Delta x = 10 \pm 8 \text{ см};$$

$$(\text{виміряне значення } y) = y_{\text{найкращ.}} \pm \Delta y = 20 \pm 15 \text{ см};$$

$$q_{\text{найкращ.}} = x_{\text{найкращ.}} * y_{\text{найкращ.}} = (10) \cdot 20 = 200 \text{ см}^2.$$

Найбільше ймовірне значення вимірюваної величини:

$$x = x_{\text{найкращ.}} + \Delta x = 10 + 8 = 18;$$

Найбільше ймовірне значення вимірюваної величини:

$$y = y_{\text{найкращ.}} + \Delta y = 20 + 15 = 35;$$

Найменше ймовірне значення вимірюваної величини:

$$x = x_{\text{найкращ.}} - \Delta x = 10 - 8 = 2;$$

Найменше ймовірне значення вимірюваної величини:

$$y = y_{\text{найкращ.}} - \Delta y = 20 - 15 = 5;$$

$$\text{Найбільше ймовірне значення для } q_{\text{найб.}} = 18 \cdot 35 = 630;$$

$$\text{Найменше ймовірне значення для } q_{\text{найм.}} = 2 \cdot 5 = 10;$$

Інтервал, в якому лежить ймовірно лежить q : 10-630;

У відповідності з правилом похибки здобутку результатів вимірювань:

$$\text{Відносна похибка (вимір. } x) \delta_x = \frac{\Delta x}{|x_{\text{найкращ.}}|} = \frac{8}{|10|} * 100 = 80 \%;$$

$$\text{Відносна похибка (вимір. } y) \delta_y = \frac{\Delta y}{|y_{\text{найкращ.}}|} = \frac{15}{|20|} * 100 = 75 \%$$

$$\text{Відносна похибка в } q \text{ є сума } = 80\% + 75\% = 155 \%$$

Якщо ми захочемо узнати абсолютну похибку в q , необхідно перемножити отримане число на $S_{\text{найкращ.}}$:

$$\Delta S = \delta_S * S_{\text{найкращ.}} = 1,55 * 200 = 310 \text{ см}^2.$$

$$\text{Отже: (Значення } q) = q_{\text{найкращ.}} \pm \Delta q = 200 \pm 300 \text{ см}^2;$$

Відповідь. Розрахований інтервал, в якому лежить ймовірно лежить q : = 10-630 абсолютно не узгоджується з інтервалом, розрахованим у відповідності з ф-лою: (Значення q) = $q_{\text{найкращ.}} \pm \Delta q = 200 \pm 300 \text{ см}^2$.

(Правило вимагає, щоб величини x і y вимірювалися з малими відносними похибками, а в даному випадку- похибки великі – по відношенню до одиниці).

5.6 Лаборант змішує розчини хімічних реагентів із двох бутлів, попередньо вимірявши окремо маси цих наповнених і потім порожніх бутлів і одержавши в результаті:

$$M_1 - \text{маса першого бутля і його вмісту} = 540 \pm 10 \text{ г};$$

$$m_1 = \text{маса першого порожнього бутля} = 72 \pm 1 \text{ г};$$

$$M_2 = \text{маса другого бутля і його вмісту} = 940 \pm 20 \text{ г};$$

$$m_2 = \text{маса другого порожнього бутля} = 97 \pm 1 \text{ г}.$$

Необхідно визначити повну масу хімічних реагентів, розрахувати похибку повної маси та записати кінцевий результат.

Рішення задачі:

Лаборант розраховує повну масу рідини як

$$M = M_1 - m_1 + M_2 - m_2 = (540 - 72 + 940 - 97) \text{ г} = 1311 \text{ г}.$$

У відповідності з правилом похибка у його результаті є сума всіх чотирьох похибок:

$$\Delta M \approx \Delta M_1 + \Delta m_1 + \Delta M_2 + \Delta m_2 = (10 + 1 + 20 + 1) \text{ г} = 32 \text{ г}.$$

Таким чином, його кінцевий результат (належним чином заокруглений) має вигляд

$$\text{Відповідь. Повна маса рідини} = 1310 \pm 30 \text{ г}.$$

Необхідно відмітити, що істотно менші похибки в масах порожніх бутлів вносять незначну добавку в кінцеву похибку.

5.7 Спеціаліст отримав наступні результати вимірювань:

$$a = 5 \pm 1 \text{ см};$$

$$b = 18 \pm 2 \text{ см};$$

$$c = 12 \pm 1 \text{ см};$$

$$t = 3,0 \pm 0,5 \text{ с};$$

$$m = 18 \pm 1 \text{ г}.$$

Використовуючи правила похибки суми (різниці) результатів вимірювань та добутку і ділення результатів вимірювань, розрахуйте похибки та відносні похибки (в %):

а) $a+b+c$; б) $a+b-c$; в) $c*t$; г) $4a$; д) $b/2$ (де цифри 4 і 2 не мають похибки), е) $m*b/t$.

Рішення задачі:

а) У відповідності з правилом (Похибки суми та різниці величин):

$\Delta q \approx \Delta x + \dots + \Delta z + \dots + \Delta w$, а саме:

$$\Delta q = \Delta a + \Delta b + \Delta c = 1 + 2 + 1 = 4; q = a + b + c = 5 + 18 + 12 = 35;$$

Відповідь. $q = (35 \pm 4)$ см.

б) У відповідності з правилом (Похибки суми та різниці величин):

$\Delta q \approx \Delta x + \dots + \Delta z + \dots + \Delta w$, а саме:

$$\Delta q = \Delta a + \Delta b + \Delta c = 1 + 2 + 1 = 4; q = a + b - c = 5 + 18 - 12 = 11;$$

Відповідь. $q = (11 \pm 4)$ см.

в) У відповідності з правилом (Похибки добутку і ділення результатів вимірювань):

$\delta_q \approx \delta_x + \dots + \delta_z + \delta_u + \dots + \delta_w$, а саме:

$$\delta_q = \delta_c + \delta_t = \frac{\Delta c}{|c|} + \frac{\Delta t}{|t|} = \frac{1}{12} + \frac{0,5}{3,0} = 0,083 + 0,167 = 8,3\% + 16,7\% = 25\%;$$

$$q = c*t = 12*3 = 36;$$

$$\Delta q = q*0,25 = 36*0,25 = 9;$$

Відповідь. $q = (36 \pm 9)$ см*с.

г) У відповідності з правилом (Похибки добутку результату вимірювань на точне число): $\Delta q = |B| * \Delta x$, а саме: $\Delta q = 4 * \Delta x = 4 * 1 = 4$; $q = B * x = 4 * 5 = 20$;

Відповідь. $q = (20 \pm 4)$ см.

д) У відповідності з правилом (Похибки добутку результату вимірювань на точне число): $\Delta q = |B| * \Delta x$, а саме: $\Delta q = \left|\frac{1}{2}\right| * \Delta a = 0,5 * 2 = 1$; $q = \frac{1}{2} * a = 0,5 * 18 = 9$;

$q = (9 \pm 1)$ см.

е) У відповідності з правилом (Похибки добутку і ділення результатів вимірювань):

$\delta_q \approx \delta_x + \dots + \delta_z + \delta_u + \dots + \delta_w = \frac{\Delta x}{|x|} + \dots + \frac{\Delta z}{|z|} + \frac{\Delta u}{|u|} + \dots + \frac{\Delta w}{|w|}$, а саме:

$$\delta_q = \delta_m + \delta_b + \delta_t = \frac{\Delta m}{|m|} + \frac{\Delta b}{|b|} + \frac{\Delta t}{|t|} = \frac{1}{18} + \frac{2}{18} + \frac{0,5}{3,0} =$$

$$= 0,056 + 0,111 + 0,167 = 5,6\% + 11,1\% + 16,7\% = 33,4\%;$$

$$q = m*b/t = 18*18/3 = 108; \Delta q = q*0,33 = 108*0,33 = 36;$$

Відповідь. $q = (108 \pm 36)$ см²*с.

5.8 Проаналізувати та надати: правило похибки суми та різниці величин, правило похибки добутку і ділення результатів вимірювань, а також правило добутку результату вимірювань на точне число та скористатися цими правилами під час розрахунку наступних виразів:

а) $(5 \pm 1) + (8 \pm 2) - (10 \pm 4)$;

$$\text{б) } (5 \pm 1) * (8 \pm 2);$$

$$\text{в) } (10 \pm 1) / (20 \pm 2);$$

$$\text{г) } 2\pi * (10 \pm 1) \text{ (цифри } \pi \text{ і } 2 \text{ не мають похибки)}.$$

Рішення задачі:

а) У відповідності з правилом (Похибки суми та різниці величин):

$$\Delta q \approx \Delta x + \dots + \Delta z + \dots + \Delta w, \text{ а саме:}$$

$$\Delta q = \Delta a + \Delta b + \Delta c = 1 + 2 + 4 = 7; q = a + b - c = 5 + 8 - 10 = 3;$$

$$\text{Відповідь. } q = (3 \pm 7).$$

б) У відповідності з правилом (Похибки добутку і ділення результатів вимірювань):

$$\delta_q \approx \delta_x + \dots + \delta_z + \delta_u + \dots + \delta_w = \frac{\Delta x}{|x|} + \dots + \frac{\Delta z}{|z|} + \frac{\Delta u}{|u|} + \dots + \frac{\Delta w}{|w|}, \text{ а саме:}$$

$$\delta_q = \delta_c + \delta_t = \frac{\Delta c}{|c|} + \frac{\Delta t}{|t|} = \frac{1}{|5|} + \frac{2}{|8|} = 0,2 + 0,25 = 0,45 = 0,45 * 100 = 45\%;$$

$$q = c * t = 5 * 8 = 40;$$

$$\Delta q = q * 0,45 = 40 * 0,45 = 18;$$

$$\text{Відповідь. } q = (40 \pm 20).$$

в) У відповідності з правилом (Похибки добутку і ділення результатів вимірювань):

$$\delta_q \approx \delta_x + \dots + \delta_z + \delta_u + \dots + \delta_w = \frac{\Delta x}{|x|} + \dots + \frac{\Delta z}{|z|} + \frac{\Delta u}{|u|} + \dots + \frac{\Delta w}{|w|}, \text{ а саме:}$$

$$\delta_q = \delta_c + \delta_t = \frac{\Delta c}{|c|} + \frac{\Delta t}{|t|} = \frac{1}{|10|} + \frac{2}{|20|} = 0,1 + 0,1 = 10\% + 10\% = 20\%; q = c/t = 10/20 = 0,5;$$

$$\Delta q = q * 0,2 = 0,5 * 0,2 = 0,1;$$

$$\text{Відповідь. } q = (0,5 \pm 0,1).$$

г) У відповідності з правилом (Похибки добутку результату вимірювань на точне число): $\Delta q = |B| * \Delta x$, а саме: $\Delta q = |2p| * \Delta \epsilon = 6,28 * 1 = 6,3$;

$$q = 6,28 * \epsilon = 6,28 * 10 = 62,8;$$

$$\text{Відповідь. } q = (63 \pm 6).$$

5.9 Студент вимірює чотири довжини: $a = 50 \pm 5$; $b = 30 \pm 3$; $c = 40 \pm 1$; $d = 7,8 \pm 0,3$ (всі в см), а потім розраховує три суми $a+b$; $a+c$; $a+d$.

Потрібно обґрунтувати використання відповідних правила та знайти похибки для цих сум у випадку, коли вихідні похибки можуть не бути незалежними (похибки просумовуються), а також коли відомо, що ці похибки незалежні та випадкові (похибки складаються «квадратично»).

Враховуючи, що похибку потрібно знати тільки з однією значущою цифрою, в якому випадку із трьох похибок в другому доданку (тобто у b , c або d) нею можливо знехтувати?

Рішення задачі:

1) У випадку, коли похибки можуть не бути незалежними, потрібно скористатися правилом (Похибки суми та різниці величин):

$\Delta q \approx \Delta x + \dots + \Delta z + \dots + \Delta w$, а саме:

а) $\Delta q = \Delta a + \Delta b = 5 + 3 = 8$; $q = a + b = 50 + 30 = 80$;

Відповідь. $q = (80 \pm 8)$.

б) $\Delta q = \Delta a + \Delta c = 5 + 1 = 6$; $q = a + c = 50 + 40 = 90$;

Відповідь. $q = (90 \pm 6)$.

с) $\Delta q = \Delta a + \Delta d = 5 + 0,3 = 5,3 = 5$; $q = a + d = 50 + 7,8 = 57,8 = 58$;

Відповідь. $q = (58 \pm 5)$.

2) У випадку, коли похибки незалежні та випадкові, потрібно скористатися правилом $\Delta q = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, а саме:

а) $\Delta q = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2} = \sqrt{(5)^2 + (3)^2} = \sqrt{34} = 5,8 = 6$; $q = a + b = 50 + 30 = 80$;

Відповідь. $q = (80 \pm 6)$.

в) $\Delta q = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta c)^2} = \sqrt{(5)^2 + (1)^2} = \sqrt{26} = 5,1 = 5$; $q = a + c = 50 + 40 = 90$;

Відповідь. $q = (90 \pm 5)$.

с) $\Delta q = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta d)^2} = \sqrt{(5)^2 + (0,3)^2} = \sqrt{25,1} = 5,01 = 5$; $q = a + b = 50 + 7,8 = 57,8 = 58$;

Відповідь. $q = (58 \pm 5)$.

Враховуючи, що похибку потрібно знати тільки з однією значущою цифрою, в третьому випадку в другому доданку (тобто в d) нею можливо знехтувати.

5.10 В процесі розрахунку нижченаведеного приклада обґрунтувати використання правила розрахунку похибки при піднесенні вимірної величини до ступеня.

Припустимо, що експериментатор визначає прискорення вільного падіння g , вимірюючи час t падіння каменю з висоти h (h визначається відомою формулою $h = (\frac{1}{2})g * t^2$). Після декількох вимірювань часу він знаходить $t = 1,6 \pm 0,1$ с

і вимірює висоту h як $h = 14,1 \pm 0,1$ м.

Рішення задачі:

Оскільки h визначається відомою формулою $h = (\frac{1}{2})g * t^2$ то експериментатор обчислює g як: $g = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 * 14,1 \text{ м}}{(1,6 \text{ с})^2} = 11 \text{ м/с}^2$.

Похибка цього результату може бути знайдена з допомогою правила *розрахунку похибки при піднесенні вимірної величини до ступеня*.

Тут необхідно знати відносні похибки в кожному із співмножників виразу $g = \frac{2h}{t^2}$, який використовується для розрахунку g . Співмножник 2 не містить похибки. Відносні похибки в h і t дорівнюють:

$$\delta_h = \frac{\Delta h}{|h|} = \frac{0,1}{|14,1|} = 0,007 = 0,7\%$$

$$i \quad \delta_t = \frac{\Delta t}{|t|} = \frac{0,1}{|1,6|} = 0,063 = 6,3 \%$$

У відповідності з правилом відносна похибка в t^2 в 2 рази більша, ніж в t . Отже, застосовуючи правило для добутків і часток до формули $g = \frac{2h}{t^2}$, ми одержимо для відносної похибки

$$\delta_g = \delta_h + 2 * \frac{\Delta t}{|t|} = 0,7\% + 2 * (6,3\%) = 13,3\%$$

і, відповідно, похибку

$$\Delta g = (11 \text{ м/с}^2) * \frac{13,3}{100} = 1,46 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь. Таким чином, остаточний результат нашого експериментатора (необхідним чином округлений) становить $g = 11 \pm 1 \text{ м/с}^2$.

5.11 Проаналізувати та надати формулу оцінювання похибки за використання задовільної функції однієї змінної у випадках непрямих вимірювань:

Кут θ виміряли як 125 ± 2 град. Потім це значення використовується для розрахунку $\sin(\theta)$.

Необхідно розрахувати $\sin(\theta)$ та похибку.

Рішення задачі:

Найкраща оцінка для $\sin(\theta)$ ($\theta = 125$ град.) $= 0,82$.

Відповідно до правила (Похибки в задовільній функції однієї змінної)

похибка Δq дорівнює: $\Delta q = \left| \frac{dq}{dx} \right| * \Delta x$, а саме:

$$\Delta(\sin q) = \left| \frac{d \sin q}{dq} \right| * \Delta q = |\cos q| * \Delta q.$$

Враховуючи, що похибка Δq повинна бути виражена в радіанах, оскільки похідна от $\sin q$ дорівнює $\cos q$, тільки тоді, якщо кут q виражений у радіанах. Отже, перепишемо $\Delta q = 2^\circ$ у вигляді $\Delta q = 0,03$ рад;

тоді $\Delta(\sin q) = (\cos 125^\circ) * 0,03 = 0,57 * 0,03 = 0,02$.

Таким чином, наш кінцевий результат має вигляд

Відповідь. $\sin(\theta) = 0,82 \pm 0,02$.

5.12 Обґрунтувати використання загальної формули для розрахунків похибок в непрямих вимірюваннях та методу «крок за кроком» на прикладі розрахунку певної величини $c = a * v$: якщо $a = 10,0 \pm 0,5 \text{ Н}$; $v = 15 \pm 1 \text{ см}$.

Рішення задачі:

1. Загальна формула для розрахунку похибок в непрямих вимірюваннях має вигляд:

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \Delta y\right)^2}.$$

$$\text{відносна похибка } a \quad \delta_a = \frac{\Delta a}{|a_{\text{найкращ.}}|} = \frac{0,5}{|10|} * 100\% = 5\%;$$

$$\text{відносна похибка } b \quad \delta_b = \frac{\Delta b}{|b_{\text{найкращ.}}|} = \frac{1}{|15|} * 100\% = 6,7\%;$$

$$\Delta C = \sqrt{\left(\frac{\partial C}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial b} \Delta b\right)^2} = \sqrt{(b * \Delta a)^2 + (a * \Delta b)^2} = \sqrt{(15 * 0,5)^2 + (10 * 1)^2} = \sqrt{56,25 + 100} = \sqrt{156,25} = 12,5 \text{ Н*см.}$$

2. Якщо похибки вимірюваних величин a і b незалежні та випадкові, то відносна похибка в нашому випадку дорівнює квадратичній сумі відносних похибок:

$$\delta_q = \sqrt{(\delta_a)^2 + (\delta_b)^2}, \text{ а саме: } \delta_c = \sqrt{(5\%)^2 + (6,7\%)^2} = 8,36\%.$$

$$C_{\text{найкращ.}} = a_{\text{найкращ.}} * b_{\text{найкращ.}} = (10) * (15) = 150 \text{ Н*см.}$$

$$\text{Абсолютна похибка } \Delta C = 150 * 0,0836 = 12,5 \text{ Н*см.}$$

Відповідь. (значення C) = $(150 \pm 13) \text{ Н*см.}$

Висновок: Похибки, розраховані двома методами рівні $12,5 \text{ Н*см}$ (або 13 Н*см).

5.13 Спеціаліст проводить вимірювання величини x п'ять раз і отримує результати:

5, 7, 9, 7, 8.

Необхідно розрахувати $\bar{x}$ та стандартне відхилення s_x . Порівняти два варіанти (з N і $N-1$) під час розрахунку s_x .

Рішення задачі:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{5+7+9+7+8}{5} = \frac{36}{5} = 7,2.$$

$$1) \quad s_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5} ((5-7,2)^2 + (7-7,2)^2 + (9-7,2)^2 + (7-7,2)^2 + (8-7,2)^2)} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{5} ((-2,2)^2 + (-0,2)^2 + (1,8)^2 + (-0,2)^2 + (0,8)^2)} = \sqrt{\frac{1}{5} (4,84 + 0,04 + 3,24 + 0,04 + 0,64)} = \sqrt{\frac{1}{5} (8,8)} =$$

$$= \sqrt{1,76} = 1,33 = \underline{\underline{1,3}}.$$

$$2) \quad s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} ((5-7,2)^2 + (7-7,2)^2 + (9-7,2)^2 + (7-7,2)^2 + (8-7,2)^2)} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} ((-2,2)^2 + (-0,2)^2 + (1,8)^2 + (-0,2)^2 + (0,8)^2)} = \sqrt{\frac{1}{4} (4,84 + 0,04 + 3,24 + 0,04 + 0,64)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} (8,8)} = \sqrt{2,2} = 1,48 = \underline{\underline{1,5}}.$$

Відповідь. 1. $s_x = 1,3$; 2. $s_x = 1,5$.

5.14 Експериментатор вимірює густину рідини п'ять разів і отримує результати (в г/см³): 1,8; 2,0; 2,0; 1,9; 1,8.

Що можна сказати про найкращу оцінку і похибку, базуючись на його вимірах?

Рішення задачі:

Якщо зважити, щостудент вимірює густину рідини п'ять разів і отримує результати (в г/см³): 1,8; 2,0; 2,0; 1,9; 1,8, то найкращою оцінкою буде середнє значення, а саме 1,9 г/см³, а похибку =0,1 г/см³.

Відповідь. (1,9±0,1) г/см³)

5.15 Проаналізувати та надати порівняння використання загальної формули для розрахунків похибок в непрямих вимірюваннях та методу «крок за кроком» на прикладі обробки результатів експерименту з вимірювання прискорення вільного падіння g.

В експерименті проведений багатократний прямий вимір часу падіння t сталеві кульки з висоти h (дванадцятий поверх висотного будинку) також шляхом багатократних прямих вимірювань.

Експериментальні результати:

$t = (2,43 \pm 0,11) \text{ с}$, $h = (28,85 \pm 0,20) \text{ м}$.

Робоча формула для визначення g має вигляд: $g = \frac{2h}{t^2}$.

Рішення задачі:

$g_{\text{найкращ.}} = 2h_{\text{найкращ.}}/t_{\text{найкращ.}}^2 = 2 \cdot 28,85 / 2,43^2 = 9,77 \text{ м/с}^2$.

Загальна формула для розрахунку похибок в непрямих вимірюваннях має вигляд:

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \Delta y\right)^2}.$$

Оскільки похідні обчислюються як

$$g'_h = 2/t^2; \quad g'_t = -4h/t^3.$$

$$\begin{aligned} \delta_q &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial h} \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial t} \Delta t\right)^2} = \sqrt{(2/t^2) \cdot \Delta h^2 + (4h/t^3)^2} = \sqrt{(2/2,43)^2 \cdot 0,2^2 + (4 \cdot 28,85 / 2,43^3)^2 \cdot 0,11^2} = \\ &= \sqrt{0,0046 + 0,7826} = 0,89 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Щоб не виконувати обчислення похідних g'_h і g'_t , похибку Δg можна знайти за допомогою іншої формули, тому що робоча формула може бути записана у вигляді $g = 2ht^{-2}$.

Тоді

$$\text{відносна похибка } h \delta_h = \frac{\Delta h}{h_{\text{найкращ.}}} = \frac{0,2}{28,85} \cdot 100\% = 0,69\%;$$

$$\text{відносна похибка } t \delta_t = \frac{\Delta t}{t_{\text{найкращ.}}} = \frac{0,11}{2,43} \cdot 100\% = 4,53\%;$$

$$\delta_g = \sqrt{(dh)^2 + 4 \cdot (dt)^2} = \sqrt{(0,69)^2 + 4 \cdot (4,53)^2} = \sqrt{82,56} = 9,09\%.$$

$$\Delta g = g \cdot \delta_g = 9,77 \cdot 0,091 = 0,89 \text{ м/с}^2.$$

Після заокруглення остаточний результат непрямого виміру в стандартній формі:

Відповідь. $g = (9,8 \pm 0,9) \text{ м/с}^2$.

З аналізу похибок експерименту видно, що основний внесок в δ_g дає δ_t .

Тому підвищення точності виміру прискорення вільного падіння можливо тільки після збільшення точності виміру часу падіння кульки.

5.16 Необхідно точно виміряти площу (S) прямокутного зразка паперу, призначеного для випробування розміром 2,5 см*5,0 см.

В табл. наведені результати 10-ти вимірювань ширини (***l***) та довжини (***b***) зразка.

Таблиця

Вимір. велич.	Виміряні значення
<i>l</i>	24,25; 24,26; 24,22; 24,28; 24,24; 24,25; 24,22; 24,26; 24,23; 24,24.
<i>b</i>	50,36; 50,35; 50,41; 50,37; 50,36; 50,32; 50,39; 50,38; 50,36; 50,38.

Для того, щоб виміряти площу (S) прямокутного зразка паперу, необхідно, відповідно, розрахувати середнє значення обох величин, стандартне відхилення s_x та стандартне відхилення середнього $s_{\bar{x}}$ з використанням відповідних формул.

Рішення задачі:

Розрахунок середнього та стандартного відхилення ***l***

№ вимірювання	Виміряні значення l_i	Відхилення $d_i = l_i - \bar{l}_i$	d_i^2
1	24,25	0,005	0,000025
2	24,26	0,015	0,000225
3	24,22	-0,025	0,000625
4	24,28	0,035	0,001225
5	24,24	-0,005	0,000025
6	24,25	0,005	0,000025
7	24,22	-0,025	0,000625
8	24,26	0,015	0,000225
9	24,23	-0,015	0,000225
10	24,24	-0,005	0,000025
	$\bar{l} = 24,245$		$\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (d_i)^2} = 0,019$

Стандартне відхилення середнього $s_{\bar{l}} = s_l / \sqrt{N} = 0,019 / \sqrt{10} = 0,006$.

Розрахунок середнього та стандартного відхилення b

№ вимірювання	Виміряні значення b_i	Відхилення $d_i = b_i - \bar{b}$	d_i^2
1	50,36	-0,008	0,000064
2	50,35	-0,018	0,000324
3	50,41	0,042	0,001764
4	50,37	0,002	0,000040
5	50,36	-0,008	0,000064
6	50,32	-0,048	0,002304
7	50,39	0,022	0,000484
8	50,38	0,012	0,000144
9	50,36	-0,008	0,000064
10	50,38	0,012	0,000144
$\bar{b} = 50,368$		$\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (d_i)^2} = 0,024$	

Стандартне відхилення середнього $s_{\bar{b}} = s_b / \sqrt{N} = 0,024 / \sqrt{10} = 0,0076 = 0,008$.

Найкраща оцінка для площі $S = l * b$ дорівнює добутку найкращих (середніх) значень довжини та ширини, а її відносна похибка визначається квадратичною сумою відносних похибок в l і b (у припущенні, що похибки незалежні):

$$S_{\text{найкр.}} = l_{\text{найкр.}} * b_{\text{найкр.}} = 24,245 \text{ мм} * 50,368 \text{ мм} = 1221,17 \text{ мм}^2.$$

$$\text{Відносна похибка (вимір. } l) \Delta l = \frac{\Delta l}{|l_{\text{найкращ.}}|} = \frac{0,006}{|24,25|} * 100 = 0,025 \text{ \%};$$

$$\text{Відносна похибка (вимір. } b) \Delta b = \frac{\Delta b}{|b_{\text{найкращ.}}|} = \frac{0,008}{|50,368|} * 100 = 0,016 \text{ \%}.$$

$$\text{Відносна похибка в } S \text{ є квадратичною сумою} = \sqrt{(0,025)^2 + (0,016)^2} = 0,03 \text{ \%}.$$

Якщо ми захочемо узнати похибку в S , необхідно перемножити отримане число на $S_{\text{найкращ.}}$:

$$\Delta S = \frac{\Delta S}{|S_{\text{найкращ.}}|} * S_{\text{найкращ.}} = 0,0003 * 1221,17 = 0,37 \text{ см}^2.$$

Потім, заокругляючи ΔS і $S_{\text{найкращ.}}$, одержуємо

Відповідь. (значення S) = $(1221,2 \pm 0,4) \text{ см}^2$ або $S = (1221,17 \pm 0,03\%)$.

5.17 Використовуючи значення (l) та (b), що наведені в таблиці, розрахувати величину $S = l * b$ для кожної пари, потім розрахувати середнє значення ($\bar{S}$), стандартне відхилення s_s та стандартне відхилення середнього $s_{\bar{s}}$.

Потім порівняти отримані результати з результатами розрахунків $S = (1221,2 \pm 0,4 \text{ мм}^2)$, що були виконані з використанням середніх значень величин l та b , їх стандартних відхилень s_x та стандартних відхилень середнього $s_{\bar{x}}$.

Таблиця

Вимір. велич.	Виміряні значення
<i>l</i>	24,25; 24,26; 24,22; 24,28; 24,24; 24,25; 24,22; 24,26; 24,23; 24,24.
<i>b</i>	50,36; 50,35; 50,41; 50,37; 50,36; 50,32; 50,39; 50,38; 50,36; 50,38.

Рішення задачі:

№ вимірювання	Значення S_i	Відхилення $d_i = S_i - \bar{S}_i$	d_i^2
1	1221,23	-0,06	0,0036
2	1221,49	0,32	0,1024
3	1220,93	-0,24	0,0576
4	1222,98	1,81	3,2761
5	1220,73	-0,44	0,1936
6	1220,26	-0,91	0,8281
7	1220,45	-0,72	0,4500
8	1222,22	1,05	1,1025
9	1220,22	-0,95	0,9025
10	1221,21	0,04	0,0016
	$\bar{S} = 1221,17$		$\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (d_i)^2} = 0,876$

Стандартне відхилення середнього $s_{\bar{S}} = s_S / \sqrt{N} = 0,876 / \sqrt{10} = 0,27$.

Відповідь. Отримані результати, а саме: (значення S) = (1221,2 $\pm$ 0,3) см² добре узгоджуються з попередніми: (1221,2 $\pm$ 0,4 мм²).

5.18 В експерименті з перевірки закону збереження моменту імпульсу студент отримав для початкового і кінцевого моментів (L і L') значення, що надані в таблиці.

Потрібно додати до таблиці додаткові стовбці для різниці ($L - L'$) і похибки і перевірити, чи узгоджуються результати студента із законом збереження моменту імпульсу?

Таблиця - Значення моменту імпульсу (кг*м²/с)

Початковий (L)	Кінцевий L'
3,0 $\pm$ 0,3	2,7 $\pm$ 0,6
7,4 $\pm$ 0,5	8,0 $\pm$ 1,0
14,3 $\pm$ 1,0	16,5 $\pm$ 1,0
25 $\pm$ 2	24 $\pm$ 2
32 $\pm$ 2	31 $\pm$ 2
37 $\pm$ 2	41 $\pm$ 2

Рішення задачі:

Початковий (L)	Кінцевий L'	(L - L')
3,0±0,3	2,7±0,6	0,3±0,9
7,4±0,5	8,0±1,0	-0,6±1,5
14,3±1,0	16,5±1,0	-2,2±2,0 (-2±2)
25±2	24±2	1±4
32±2	31±2	1±4
37±2	41±2	-4±4

Рішення Різниця (L - L') теоретично повинна дорівнювати нулю. У всіх випадках, крім одного, різниця менше похибки. Навіть в тому єдиному випадку (-2,2±2,0) різниця тільки незначно більша.

Відповідь. Таким чином, отримані студентом значення узгоджуються із очікуваним нульовим значенням і, відповідно, із з-ном збереження моменту імпульсу.

5.19 Виконати розрахунок середнього значення та стандартного відхилення результатів десяти вимірювань одного із показників, що характеризує якість паперу (наприклад, гладкість паперу):

86, 85, 84, 89, 86, 88, 88, 85, 83, 85 .

Рішення задачі:

Результати розрахунків зведено в табл.

Таблиця – Розрахунок середнього та стандартного відхилення

№ вимірювання	Вимірюванні значення x_i	Відхилення $d_i = x_i - \bar{x}$	d_i^2
1	86	0,1	0,01
2	85	-0,9	0,81
3	84	-1,9	3,61
4	89	3,1	9,61
5	86	0,1	0,01
6	88	2,1	4,41
7	88	2,1	4,41
8	85	-0,9	0,81
9	83	-2,9	8,41
10	85	-0,9	0,81
$\bar{x} = 85,9$			$\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (d_i)^2} = 1,91$

Відповідь. $\bar{x} = 85,9$; $s_x = 1,91$.

5.20 Проаналізувати та використати під час розрахунків формулу оцінювання похибки за використання задовільної функції однієї змінної у випадках непрямих вимірювань:

Кут θ виміряли як $q = 20 \pm 3$ град. Потім це значення використовується для розрахунку **Cosq** .

Необхідно розрахувати **Cosq** та похибку.

Рішення задачі:

Найкраща оцінка для $\cos q$ становить $\cos 20^\circ = 0,94$.

Відповідно до правила (Похибки в задовільній функції однієї змінної)

похибка Δq дорівнює: $\Delta q = \left| \frac{dq}{dx} \right| * \Delta x$, а саме:

$$\Delta(\cos q) = \left| \frac{d\cos q}{dq} \right| \Delta q = |\sin q| \Delta q \text{ (в рад).}$$

Оскільки похибка Δq повинна бути виражена в радіанах, то похідна від $\cos q$ дорівнює - $\sin q$, тільки тоді, якщо кут q виражений у радіанах. Отже, перепишемо $\Delta q = 3^\circ$ у вигляді $\Delta q = 0,05$ рад ($1 \text{ рад} = 60^\circ$);

тоді $\Delta(\cos q) = |\sin 20^\circ| * 0,05 = 0,34 * 0,05 = 0,02$.

Таким чином, наш кінцевий результат має вигляд

Відповідь. $\cos q = 0,94 \pm 0,02$.

5.21 Проаналізувати і надати послідовність формул та виконати розрахунок довірчого інтервалу у випадку, коли експериментатор багатократно вимірює величину g , прискорення вільного падіння, і отримує результат $9,5 \text{ м/с}^2$ та стандартне відхилення, що дорівнює $0,1$.

Якщо вважати, що результати його вимірювань розподілені нормально з центром, рівним прийнятому значенню $9,8 \text{ м/с}^2$ та шириною $0,1$, то яка ймовірність отримання результату, який вирізняється від $9,8 \text{ м/с}^2$ так же (або більше), як результат експериментатора?

Приймаючи, що експериментатор фактично не зробив помилок, чи можна сказати, що, ймовірно, його експеримент підпав під вплив деяких невиявлених систематичних похибок?

Рішення задачі:

Відповідь експериментатора ($9,5 \text{ м/с}^2$) вирізняється від очікуваного центра розподілу ($9,8 \text{ м/с}^2$) на $0,3$ або на три стандартних відхилення:

$$t = \frac{|x_{\text{найкращ.}} - x_{\text{очік.}}|}{s} = \frac{|9,5 - 9,8|}{0,1} = 3.$$

У відповідності з таблицею (Додаток 1) ймовірність того, що результат вирізняється на три і більше стандартних відхилення від центра розподілу дорівнює:

$$P(\text{за межами } 3s) = 0,3\%.$$

Відповідь. $P(\text{за межами } 3s) = 0,3\%$.

Це настільки неймовірно, що ми маємо запідозрити, що результати його вимірювань не розподілені нормально відносно $9,8 \text{ м/с}^2$ з $s = 0,1$. Таким чином, або експериментатор припустився явної похибки, або його результати підпали під вплив деяких невиявлених систематичних похибок.

5.22 Проаналізувати і надати послідовність формул та виконати розрахунок довірчого інтервалу у випадку, коли експериментатор хоче перевірити закон збереження енергії для певної ядерної реакції.

З цією метою він проводить експеримент і отримує результати початкової та кінцевої енергії, відповідно, $E_{\pi}=75\pm 3$ MeV і $E_{\kappa}=60\pm 9$ MeV, де в якості похибок наведені стандартні відхилення результатів.

Чи є ця різниця значимою (на 5%-му рівні)? Необхідно аргументовано дати відповідь на запитання.

Рішення задачі:

Різниця: $E_{\pi} - E_{\kappa} = 15$ MeV.

Стандартне відхилення для цього випадку розрахуємо у відповідності з формулою: $\Delta E = \sqrt{(\Delta E_{\pi})^2 + (\Delta E_{\kappa})^2} = \sqrt{(3)^2 + (9)^2} = \sqrt{90} = 9,5$ MeV.

Якщо вважати, що результати вимірювань були розподілені нормально з центром $E_{\pi} - E_{\kappa} = 0$ і центром $s = 9,5$ MeV, то отримане значення вирізняється від істинного на $15/9,5 = 1,6$, тобто на 1,6 стандартних відхилень.

Відповідь. Зважаючи, що ймовірність $P(\text{за межами } 1,6s) = 11\%$, то результат досить розумний і немає приводу сумніватися в законі збереження енергії.

5.23 Обґрунтувати схему використання критерію Шовене і визначитися, чи потрібно відкидати сумнівний результат вимірювання у випадку:

Спеціаліст проводить вимірювання товщини картону N десять разів і отримує результати (у мм):

0,86; 0,83; 0,87; 0,84; 0,82; **0,95**; 0,83; 0,85; 0,89; 0,88.

а) Потрібно розрахувати середнє значення $\bar{H}$ і стандартне відхилення s_H цих результатів.

б) Якщо спеціаліст вирішить використати критерій Шовене, то чи повинен він відкинути результат **0,95** мм? Потрібно аргументувати поступок.

Рішення задачі:

а) Середнє значення $\bar{H}$ розрахуємо у відповідності з формулою:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} =$$

$$= \frac{\sum x_i}{N} = \frac{0,86 + 0,83 + 0,87 + 0,84 + 0,82 + 0,95 + 0,83 + 0,85 + 0,89 + 0,88}{10} = \frac{8,62}{10} = 0,862 \text{ мм.}$$

$$s_v = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9} ((0,86 - 0,862)^2 + (0,83 - 0,862)^2 + \dots + (0,85 - 0,862)^2 + (0,89 - 0,862)^2 + (0,88 - 0,862)^2)} = \underline{0,039}$$

Різниця між $H_{\text{підозр.}} = 0,95$ і $\bar{H} = 0,862$ дорівнює 0,088 або 2,3 стандартних відхилення, тобто $\frac{|H_{\text{підозр.}} - \bar{H}|}{s_H} = \frac{|0,95 - 0,862|}{0,039} = 2,26 = 2,3$.

Враховуючи, що $P(\text{за межами } 2,3s_x)=1-P(\text{в межах } 2,3s_x)=1-0,979 = 0,021$ тобто 2,1 %, то для десяти вимірювань потрібно очікувати тільки 0,21 випадок, коли результат настільки (або більше) вирізнявся б від $\bar{H}$.

Відповідь. У відповідності з критерієм Шовене такий результат повинен бути відкинутим.

В подальшому потрібно перерахувати $\bar{H}$ і s_H з врахуванням, що результат 9,5 відкидається і в розрахунках не бере участі.

5.24 Спеціаліст проводить 14 вимірювань періоду коливань генератора і отримує результати (в долях секунди):

7, 3, 9, 3, 6, 9, 8, 7, 8, 12, 5, 9, 9, 3

Відчуваючи, що результат (12) завеликий, спеціаліст вирішує використати критерій Шовене. Чи відкине він цей результат? Скільки результатів, таким же чином відмінних від середнього, як 12, йому слід очікувати?

Рішення задачі:

а) Середнє значення $\bar{T}$ розрахуємо у відповідності з формулою:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \\ &= \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+3+9+3+6+9+8+7+8+12+5+9+9+3}{14} = \frac{98}{14} = 7,0. \\ s_T &= \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{13} ((7-7)^2 + (3-7)^2 + \dots + (9-7)^2 + (9-7)^2 + (3-7)^2)} = 2,72.\end{aligned}$$

Різниця між $T_{\text{підозр.}}=12$ і $\bar{T}=7,0$ дорівнює 5,0 або 1,84 стандартних відхилення, тобто $\frac{|T_{\text{підозр.}} - \bar{T}|}{s_T} = \frac{|12,0 - 7,0|}{2,72} = 1,84$.

Враховуючи, що $P(\text{за межами } 1,84s_x)=1-P(\text{в межах } 1,84s_x)=1-0,934=0,066$ тобто 6,6%, то для чотирнадцяти вимірювань потрібно очікувати тільки 0,92 випадок, коли результат настільки (або більше) вирізнявся б від $\bar{T}$.

Відповідь. У відповідності з критерієм Шовене такий результат не повинен бути відкинутим.

5.25 Два вимірювання руйнівного зусилля Р дають результати: 334 ± 1 і 336 ± 2 .

Чи можна вважати ці два результати несуперечливими?

Якщо так, то потрібно розрахувати найкращу оцінку показника Р і його похибку.

Рішення задачі:

Враховуючи, що різниця між двома значеннями: 334 ± 1 і 336 ± 2 ($336 - 334 = 2$) не перевищує ні одну із похибок (1 і 2), то обидва результати можна вважати несуперечливими.

$$x_{\text{найкр}} = \frac{w_A \cdot x_A + w_B \cdot x_B}{w_A + w_B}; \quad w_A = \frac{1}{s_A^2} = \frac{1}{1} = 1; w_B = \frac{1}{s_B^2} = \frac{1}{4} = 0,25;$$

$$x_{\text{найкр}} = \frac{w_A \cdot x_A + w_B \cdot x_B}{w_A + w_B} = \frac{334 \cdot 1 + 336 \cdot 0,25}{1 + 0,25} = \frac{334,4}{1,25} = 334,4;$$

$$w_{x_{\text{найкр}}} = \left(\sum_{i=1}^N w_i \right)^{-1/2} = (1 + 0,25)^{-1/2} = 0,9;$$

Відповідь. Найкраща оцінка, базуючись на результатах двох вимірювань) $= 334,4 \pm 0,9$.

5.26 Два спеціалісти, використовуючи дещо відмінні методи, вимірюють показник білості паперу. Кожний із них робить по десять вимірювань, розраховує середнє значення та його стандартне відхилення і, відповідно, отримує:

спеціаліст А: $P = 72 \pm 8$;

спеціаліст Б: $P = 78 \pm 5$.

а) Враховуючи обидва вимірювання, потрібно розрахувати найкращу оцінку показника Р і його похибку.

б) Потрібно оцінити, скільки вимірювань повинен додатково ще провести спеціаліст А (використовуючи свій метод), щоб вага його результату був би таким, як у спеціаліста Б?

Рішення задачі:

а) Враховуючи, що різниця між двома значеннями (72 ± 8 і 78 ± 5) ($78 - 72 = 6$) не перевищує максимальну із похибок (8), то обидва результати можна вважати несуперечливими.

$$x_{\text{найкр}} = \frac{w_A \cdot x_A + w_B \cdot x_B}{w_A + w_B}; \quad w_A = \frac{1}{s_A^2} = \frac{1}{64} = 0,016 = 0,02; \quad w_B = \frac{1}{s_B^2} = \frac{1}{25} = 0,04;$$

$$x_{\text{найкр}} = \frac{w_A \cdot x_A + w_B \cdot x_B}{w_A + w_B} = \frac{72 \cdot 0,02 + 78 \cdot 0,04}{0,02 + 0,04} = \frac{4,56}{0,06} = 76;$$

$$w_{x_{\text{найкр}}} = \left(\sum_{i=1}^N w_i \right)^{-1/2} = (0,02 + 0,04)^{-1/2} = 4,08 = 4;$$

Відповідь.

а) Найкраща оцінка, базуючись на результатах двох вимірювань) $= 76 \pm 4$.

б) Враховуючи, що результат студента А ($8/5 = 1,6$) в 1,6 рази гірший за результати студента Б, то йому потрібно ($1,6 \cdot 10 = 16$) провести додатково ще мінімум 16 дослідів (всього дослідів $= 10 + 16 = 26$).

5.27 Три експериментатори провели вимірювання і, відповідно, отримали:

експериментатор А: $R_1 = 11 \pm 1$;

експериментатор Б: $R_2 = 12 \pm 1$;

експериментатор С: $R_3 = 10 \pm 3$.

Враховуючи всі вимірювання, потрібно розрахувати найкращу оцінку показника R і його похибку.

Рішення задачі:

Враховуючи отримані значення вимірювань: $R_1 = 11 \pm 1$; $R_2 = 12 \pm 1$;

$R_3 = 10 \pm 3$, розрахуємо $R_{\text{найкр.}} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^N w_i}$, а також

$$w_1 = \frac{1}{1^2} = 1; w_2 = \frac{1}{1^2} = 1; w_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9};$$

$$\text{Відповідь. } R_{\text{найкр.}} = \frac{(1 \cdot 11) + (1 \cdot 12) + (\frac{1}{9} \cdot 10)}{1 + 1 + \frac{1}{9}} = 11,42 \text{ ом};$$

$$\text{Загальна похибка результату: } s_{x_{\text{найкр.}}} = (\sum_{i=1}^N w_i)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+1+\frac{1}{9}}} = 0,69.$$

$$R = (11,4 \pm 0,7) \text{ ом.}$$

5.28 Проаналізувати та надати формули та визначити послідовність (алгоритм) використання формул для доказу, чи відповідає нормальному розподілу Гауса певна вибірка спостережень.

Рішення задачі:

В процесі обробки результатів досліджень часто виникає питання, чи підпорядковуються результати даного експерименту очікуваному граничному розподілу випадкової величини?

Питання можна поставити інакше: як визначити, чи узгоджуються розподіл величини, яку ми вимірюємо, з очікуваним теоретичним розподілом?

Щоб дати відповідь на ці запитання, потрібно виконати певну послідовність дій та скористатися розробленими для цього випадку формулами.

1. Перший крок – це розрахунок найкращих оцінок за результатами вимірювань (наприклад, для 40 виміряних величин):

$$(\text{найкраща оцінка } X) = \bar{x} = \sum_{i=1}^{40} \frac{x_i}{40} = 730,1 \text{ см} \quad (1)$$

$$(\text{найкраща оцінка } s) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{39}} = 46,8 \text{ см} \quad (2)$$

Після розраховуємо приведені значення $\bar{c}^2$, яке ми тепер будемо позначати як $\bar{c}_o^2$ (де нижній індекс "о" означає "отримане" (obtained)).

3. Потім, виходячи з того, що наші результати вимірювань підпорядковуються нормальному розподілу, ми розраховуємо ймовірність (маючи X та s)

$$P(\bar{c}^2 \geq \bar{c}_o^2) \quad (3)$$

отримання значення $\bar{c}^2$, яке буде більшим (або рівним) за $\bar{c}_o^2$, що фактично розраховане.

4. Якщо ця ймовірність велика, то наше значення $\bar{c}_o^2$ прийнятне і немає причин, щоб відкидати припущення, що наші результати вимірювань підпорядковуються нормальному розподілу.

5. Якщо ця ймовірність незначна, то малоімовірно, що наші результати вимірювань підпорядковуються нормальному розподілу.

Як завжди буває зі статистичними критеріями, ми повинні вирішити, де проходить та межа між тим, що "розумно ймовірно" і тим, що ні. Зазвичай, приймають межу в 5 %.

Тоді ми можемо сказати, що наше отримане значення $\bar{c}_o^2$ виявляє "значиму розбіжність", якщо

$$P(\bar{c}^2 \geq \bar{c}_o^2) < 5 \%$$

і ми відкинули б наше припущення, що наші результати вимірювань підпорядковуються нормальному розподілу (на 5 % рівні). (якщо ми встановимо межу в 1 %, то тоді розрахунки прив'язуються до нього).

Розрахунки ймовірностей досить складні, тому потрібно скористатися таблицею, фрагмент якої наведено в додатку 2.

2. Разом з тим, виявляється, що ймовірність отримання будь-якого значення $\bar{c}_o^2$ залежить від числа ступенів свободи. Тому ми будемо записувати так: $P_d(\bar{c}^2 \geq \bar{c}_o^2)$, щоб підкреслити її залежність від d .

Тому, числа в лівій колонці (табл. в Додатку 2) – це ступені свободи ($d=1, 2, 3, 5, 10, 15$). Числа, вказані у верхньому рядку таблиці – можливі значення отриманих $\bar{c}_o^2$. Кожне число в таблиці – виражена у відсотках ймовірність $P_d(\bar{c}^2 \geq \bar{c}_o^2)$, як функція d від $\bar{c}_o^2$.

3. Зі збільшенням $\bar{c}_o^2$ ймовірність отримання $\bar{c}^2 \geq \bar{c}_o^2$ зменшується, але в залежності від значення d . Необхідно відмітити таку властивість, що ймовірність $P_d(\bar{c}^2 \geq 1)$ завжди велика (в крайньому випадку не менше 32 % - див. відповідну колонку в табл.), тому значення $\bar{c}_o^2$ рівне 1 або менше, досить розумне і ніколи не призводить до вимоги відкинути наші результати вимірювань як такі, що не підпорядковуються нормальному розподілу.

8. Мінімальна величина $\bar{c}_o^2$, яка ставить під сумнів очікуваний розподіл, залежить від d . Для однієї ступені свободи ми бачимо, що $\bar{c}_o^2$ може бути і більшим, наприклад, 4, перш ніж розходження стане "значимим" (на 5% рівні).

У випадку двох ступенів свободи відповідна межа дорівнює $\bar{c}_0^2=3$; для $d=5$ вона близька до 2 (фактично $\bar{c}_0^2=2,2$) і т.д.

Відповідь. Використовуючи ймовірності із таблиць ми тепер можемо прописувати кількісний критерій значимості для $\bar{c}_0^2$, яке отримане в будь-якому експерименті.

5.29 Проаналізувати і надати формули та визначити значення критерія χ^2 для вибірки із 40 вимірювань $x_1, x_2, \dots, x_{40}$ довжини траєкторії x кулі, що вилітає із деякої рушниці (результати наведені в таблиці).

Таблиця – Вимірювані значення x (в сантиметрах)

731	772	771	681	722	688	653	757	733	742
739	780	709	679	760	748	672	687	766	645
678	748	689	810	805	778	764	753	709	675
698	770	754	830	725	710	738	638	787	712

Рішення задачі:

1. Таким чином, нашим першим кроком буде розрахунок найкращих оцінок для цих величин за 40 результатами вимірювань:

$$(\text{найкраща оцінка } X) = \bar{x} = \sum_{i=1}^{40} x_i / 40 = 730,1 \text{ см} \quad (1)$$

$$(\text{найкраща оцінка } s) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{39}} = 46,8 \text{ см} \quad (2)$$

2. Розрахувавши значення X і s , ми можемо повинні розрахувати очікуваний у відповідності із законом Гауса розподіл наших 40-а результатів і порівняти його з результати фактично отриманого розподілу.

3. Необхідно поділити весь інтервал можливих значень на біни. У випадку 40 вимірювань ми можемо вибрати межі бінів при $X-s$, X і $X+s$, визначивши таким чином чотири біни, як це наведено в табл.1.

Таблиця 1

Номер біна	1	2	3	4
Значення x в біні	$x < X-s$, або $x < 683,3$	$X-s < x < X$, або $683,3 < x < 730,1$	$X < x < X+s$, або $730,1 < x < 776,9$	$X+s < x$, або $776,9 < x$
Число спостережень O_k в біні	8	10	16	6

В нашому випадку число бінів $n=4$. Число спостережень, що потрапляє в бін, позначимо як O_k (остання строчка в таблиці).

4. Потім, вважаючи, що наші результати вимірювань розподілені нормально (з X і s , як ми оцінили), ми можемо розрахувати очікуване число E_k результатів вимірювань для кожного біна k .

5. Щоб знайти очікуване число E_k , потрібно перемножити ймовірності на повне число вимірювань $N=40$. Ці результати наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Номер біна	1	2	3	4
Ймовірність P_k , %	16	34	34	16
Очікуване число $E_k = N * P_k$	6,4	13,6	13,6	6,4
Число спостережень O_k в біні	8	10	16	6
$O_k - E_k$	1,6	-3,6	2,4	-0,4

6. Перед нами тепер стоїть задача вирішити, настільки добре очікувані числа E_k узгоджуються з відповідними числами O_k . Ми, з одного боку, не очікуємо ідеального співпадіння чисел, але, з іншого боку, якщо наша гіпотеза про те, що результати вимірювань розподілені нормально, правильна, то ми очікуємо, що відхилення

$$O_k - E_k \quad (3)$$

буде незначним. І, навпаки, якщо вони виявляться значними, то можна констатувати, що гіпотеза не справджується.

В якості числової характеристики введемо χ^2 , яке слугуватиме показником того, настільки добре узгоджуються розподіли: очікуваний з нормальним:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^n \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} \quad (4)$$

Якщо $\chi^2=0$, то узгодження ідеальне, тобто $O_k = E_k$ для всіх бінів. В загальному випадку окремі члени в сумі (4) повинні бути порядку 1, а в сумі всього n членів.

У відповідності з (4) проведемо розрахунки стосовно наших спостережень:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^n \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} = \frac{(1,6)^2}{6,4} + \frac{(-3,6)^2}{13,6} + \frac{(2,4)^2}{13,6} + \frac{(-0,4)^2}{6,4} = 1,80.$$

Відповідь. Як бачимо, величина 1,80 для χ^2 менше, ніж число членів в сумі (а саме 4), то у нас не повинно виникати сумнівів стосовно того, що розподіл наших результатів відповідає очікуваному, а саме нормальному.

5.30 Проаналізувати та надати формули та визначити (з заповненнями вільних граф в таблиці), чи відповідає нормальному розподілу Гауса вибірка спостережень за ростом 200 аборигенів на деякому острові, що наведені у таблиці:

Таблиця

Номер біна	Ріст в біні	Число спостережень O_k в біні	Очікуване число E_k	P_k , %
1	менше $X-1,5 S$	14		
2	між $X-1,5 S$ і $X-S$	29		
3	між $X-S$ і $X-0,5 S$	30		
4	між $X-0,5 S$ і X	27		
5	між X і $X+0,5 S$	28		
6	між $X+0,5 S$ і $X+S$	31		
7	між $X+S$ і $X+1,5 S$	28		
8	більше $X+1,5 S$	13		

Рішення задачі:

У відповідності з умовами контрольного завдання, необхідно перевірити, чи узгоджуються результати розподілу росту 200 аборигенів з очікуваним нормальним розподілом $f_{x,s}(x)$.

Таблиця

Номер біна	Ріст в біні	Число спостережень O_k в біні	Очікуване число E_k	P_k , %
1	менше $X-1,5 S$	14	13,4	6,7
2	між $X-1,5 S$ і $X-S$	29	18,3	9,15
3	між $X-S$ і $X-0,5 S$	30	30,0	15,0
4	між $X-0,5 S$ і X	27	38,3	19,15
5	між X і $X+0,5 S$	28	38,3	19,15
6	між $X+0,5 S$ і $X+S$	31	30,0	15,0
7	між $X+S$ і $X+1,5 S$	28	18,3	9,15
8	більше $X+1,5 S$	13	13,4	6,7

Для цього спочатку необхідно:

1. Розрахувати ймовірність P_k (заповнивши останню графу таблиці) потрапляння будь-якого аборигена в заданий бін (використовуємо таблицю інтегралів похибок - Додаток 1);

2. Потім – розраховуємо очікуване число E_k , перемножуючи ймовірність на число чоловіків (200). Ці числа наведені в четвертій графі таблиці.

Для проведення всіх розрахунків ми використали 3 ступені свободи, тому залишилося $d=8-3=5$ ступенів свободи.

3. Використовуючи дані, наведені в таблиці, розраховується:

$$\bar{c}^2 = c^2/d = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^8 \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} = 3,5.$$

4. Зважаючи на те, що ця величина помітно більша за 1, появляється підозра, що ріст аборигенів не підпорядковується нормальному закону. Використовуючи табл. 1, знаходимо, що якби ріст аборигенів мав очікуваний характер, то ймовірність $P_5(\bar{c}^2 \geq 3,5)$ отримання значення $\bar{c}^2$ не меншого, ніж 3,5 складає приблизно 0,5 %. За будь-якими стандартами це практично нереально.

Відповідь. Практично нереально, щоб за ростом аборигени були розподілені нормально. Навіть на 1 % рівні (більш високозначимому) ми також можемо мати аналогічний висновок.

6. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ ЩОДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Самостійна робота студентів регламентується Положенням про організацію навчального процесу в вищих навчальних закладах України, затвердженого наказом Міністерства освіти України № 161 від 2 червня 1993 року та Положенням про систему нарахування балів за кредитно-модульною системою.

Положенням про організацію навчального процесу в вищих навчальних закладах України передбачено, що навчальний час, відведений для самостійної роботи студентів визначається робочим навчальним планом і повинен становити не менше 0,5 загального обсягу навчального часу студента, відведеного для вивчення конкретної дисципліни.

Мета самостійної роботи студентів:

- розвиток творчих здібностей та активізація розумової діяльності студентів;
- формування в студентів потреби безперервного самостійного поповнення знань;
- здобуття студентом глибокої системи знань;
- самостійна робота студентів як результат морально-вольових зусиль.

Завдання самостійної роботи студентів:

- навчити студентів самостійно працювати над літературою;
- творчо сприймати навчальний матеріал і його осмислювати;
- набути навички щоденної самостійної роботи в одержанні та узагальненні знань, вмінь.

Зміст самостійної роботи студентів з конкретної дисципліни визначається навчальною програмою дисципліни та робочою навчальною програмою вивчення дисципліни.

На самостійну роботу можуть виноситись:

- підготовка до лекцій;

- ▼ частина теоретичного матеріалу, менш складного за змістом;
- ▼ підготовка до семінарських занять;
- ▼ виконання індивідуальної роботи.

Самостійна робота над засвоєнням навчального матеріалу з конкретної дисципліни може виконуватись у бібліотеці, навчальних кабінетах, комп'ютерних класах (лабораторіях), а також у домашніх умовах.

Залежно від особливостей дисциплін викладач може видавати студентам різні види завдань самостійної роботи:

- ▼ переробка інформації отриманої безпосередньо на обов'язкових навчальних заняттях;
- ▼ робота з відповідними підручниками та особистим конспектом лекцій;
- ▼ самостійне вивчення окремих тем або питань із розробкою конспекту;
- ▼ робота з довідковою літературою;
- ▼ написання рефератів, повідомлень;
- ▼ творчі завдання (доповіді, проекти, есе, огляди тощо);
- ▼ виконання підготовчої роботи до лабораторних та практичних занять;
- ▼ виконання індивідуальних графічних, розрахункових завдань;
- ▼ виконання курсових робіт (проектів);
- ▼ підготовка письмових відповідей на проблемні питання;
- ▼ виготовлення наочності;
- ▼ складання картотеки літератури за змістом наступної фахової діяльності;

Успішне виконання завдання самостійної роботи можливе за умов наявності у студентів певних навичок: вміння працювати з книгою (складати план, конспект, реферат); проводити аналіз навчального матеріалу (складати різні види таблиць, проводити їх аналіз).

7. ОРГАНІЗАЦІЯ КОНТРОЛЬНИХ ЗАХОДІВ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Контрольні заходи включають поточний і підсумковий контроль знань студентів.

Поточний контроль є органічною частиною навчального процесу і проводиться під час лекцій, семінарських, практичних і лабораторних занять.

Форми поточного контролю:

- усна співбесіда за матеріалами розглянутої теми на початку наступної лекції з оцінкою відповідей студентів (5-10 хв);
- письмове фронтальне опитування студентів на початку чи в кінці лекції (5-10 хв). Відповіді перевіряються і оцінюються у позааудиторний час;
- фронтальний безмашинний стандартизований контроль знань студентів за кількома темами, винесеними на самостійну роботу (5-10 хв).

Проводиться на початку семінарських, практичних чи лабораторних занять;

- перевірка домашніх завдань;
- перевірка набутих вмінь на практичних, лабораторних заняттях;
- тестова перевірка знань студентів;
- інші форми.

За кредитно-модульної системи навчання самостійна робота впливає на загальний рейтинг з дисципліни. Контролюється після закінчення логічно завершеної частини лекцій та інших видів занять з дисципліни і її результати враховуються при виставленні підсумкової оцінки.

Навчальний матеріал навчальної дисципліни, передбачений робочим навчальним планом для засвоєння студентами у процесі самостійної роботи, виноситься на підсумковий контроль (екзамен або диф. залік/залік).

8. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

СРС до теми 3.4 Довірчі інтервали. Необхідна кількість вимірювань випадкової величини, Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок, с.15-24.

Якщо ми вимірюємо величину x декілька разів (як це, зазвичай, буває), то найкраща оцінка для x є середнє $\bar{x}$, а його стандартне відхилення середнього $s_{\bar{x}}$ є найкращою оцінкою похибки середнього.

Ми можемо зробити висновок, що

$$(\text{значення } x) = \bar{x} \pm s_{\bar{x}} \quad (1)$$

розуміючи при цьому, що згідно з нашими спостереженнями можна очікувати, що в 68% випадків результати будь-яких вимірювань величини x , які будуть проведені потім і з такою ж ретельністю, будуть перебувати в інтервалі $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$.

Похибку можливо оцінити і по-іншому. Наприклад, ми могли б віддати перевагу такій характеристиці:

$$(\text{значення } x) = \bar{x} \pm 2 s_{\bar{x}}$$

В цьому випадку визначався б інтервал, в якому, як ми очікуємо, буде лежати 95% результатів всіх однотипних вимірювань.

1. РОЗРАХУНОК ДОВІРЧОГО ІНТЕРВАЛУ

Що стосується другого питання, то, щоб отримати на нього відповідь, розглянемо спочатку наступне.

Однією із важливих характеристик, яка визначає ступінь досконалості технологічного процесу, є стабільність результатів за багатократного повтору експерименту в оптимальних для цього процесу умовах.

Адже якість продукції і техніко-економічні показники не повинні виходити за певні межі, які обумовлені вимогами нормативної документації (НД) або регламенту на даний вид продукції.

За експериментального визначення меж, в яких мають знаходитися характеристики продукту, труднощі полягають в тому, що експериментатор може виконати лише обмежене число паралельних вимірювань і за цієї малої виборки він повинен зробити висновки, які мають бути віднесені на всі вимірювання.

За дослідного визначення якої-небудь величини експериментатор стикається з тим, що паралельні вимірювання не дають однакових результатів навіть за дуже ретельної підготовки до досліджень.

Це становище є наслідком того, що на процес вимірювання, а відповідно, на його результати, впливає величезне число факторів (починаючи від стану погоди, температури в приміщенні, ступені зношеності приладів і закінчуючи станом самого експериментатора на момент проведення вимірювань).

Вплив кожного з факторів окремо незначний (мізерний), але в сукупності всі фактори викликають випадкові відхилення вимірюваної величини від її істинного значення. Тому в результаті постановки паралельних дослідів одержують набір випадкових величин.

На практиці звичайно вдається провести обмежене число паралельних вимірів, тобто одержати *випадкову вибірку з генеральної сукупності**.

У цьому випадку завдання експериментатора полягає в тому, щоб за вибіркою оцінити математичне очікування випадкової величини (для теорії похибок – це істинне значення величини X , яке нам, зазвичай, невідоме).

*Весь набір значень випадкової величини називається *генеральною сукупністю*.

Частина генеральної сукупності, яку отримує дослідник в результаті проведення експерименту, називається *вибіркою*.

Ясно, що така оцінка буде мати певну величину похибки.

Чим більше буде проведено паралельних вимірів, тобто чим більшим буде обсяг вибірки, тим надійніше буде оцінене математичне очікування (істинне значення величини X). Інакше кажучи, надійність оцінки пов'язана із числом вимірювань n .

З теорії статистики відомо, що за паралельних вимірів оцінкою математичного очікування є середнє арифметичне $\bar{X}$. При цьому ступінь відхилення окремих значень величини x від середнього арифметичного $\bar{X}$ характеризується вибірковою дисперсією S^2 , яку розраховують за певними формулами. За зміни числа паралельних вимірювань n змінюються величини $\bar{X}$ і S^2 . Це впливає з того, що $\bar{X}$ і S^2 є лише оцінками і, чим більше величина n тим ці оцінки надійніші.

Якщо зробити кілька вибірок з генеральної сукупності, то кожна з них буде мати своє $\bar{X}$ і S^2 . Від вибірки до вибірки вони будуть змінюватися. Враховуючи, що вибірки випадкові, то зміна величин $\bar{X}$ і S^2 теж буде випадковою. А оскільки $\bar{X}$ і S^2 є випадкові величини, вони характеризуються не тільки значенням, але й імовірністю.

Експериментатора цікавить питання, наскільки середнє арифметичне $\bar{X}$ точно оцінює істинне значення величини X , інакше кажучи, чому дорівнює різниця $X - \bar{X}$.

Математична статистика дає можливість знайти не різницю $(X - \bar{X})$, а величину d зі співвідношення

$$|X - \bar{X}| \leq d \quad (2)$$

Оскільки $\bar{X}$ - випадкова величина, пов'язана із числом паралельних вимірювань n , то очевидно, що і d буде залежати від n .

Також очевидно, що, чим з більшою надійністю ми хочемо одержати величину d , тим більше повинно бути n . Наприклад, якщо за $|X - \bar{X}| \leq d_1$ надійність дорівнює 90%, а за $|X - \bar{X}| \leq d_2$ вона становить 95%, то $d_2 > d_1$.

Зазвичай, йдуть наступним шляхом. Заздалегідь вибирають величину надійності у відсотках (її називають довірчою ймовірністю і позначають через g).

Потім, відповідно до обраної довірчої ймовірності g , розраховують d (зазвичай, у випадку технологічних вимірів $g = 95\%$, або $g = 0,95$). Можливість здійснення помилки (ризик) визначається наступною ймовірністю:

$$P(|X - \bar{X}| \leq d) = 1 - g \quad (3)$$

Для визначення величини d можна скористатися функцією *нормального розподілу*. Таблиці нормального розподілу складені для стандартної випадкової величини, яка виражається як $d/s_{\bar{x}}$.

Виходячи з того, що $d/s_{\bar{x}} = d \cdot \sqrt{n}/s_x$, запишемо вираз (3) наступним чином:

$$P(|X - \bar{X}| \leq d) = 1 - g = \Phi\left(\frac{d \cdot \sqrt{n}}{s_x}\right) = \Phi(T)$$

$$d = \frac{T \cdot s_x}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

Величину T знаходять за таблицями для функції нормального розподілу, а потім за формулою (4) розраховують d .

Кінцевий результат можливо надати у формі:

$$(\bar{X} - d) \leq X \leq (\bar{X} + d)$$

або $X = \bar{X} \pm d \quad (5)$

Інтервал від $(\bar{X} - d)$ до $(\bar{X} + d)$, в якому розміщується значення випадкової величини, називається *довірчим інтервалом*.

Таким чином, за представлення будь-якого виміряного значення головне – показати інтервал (або похибку вимірювання) та коефіцієнт довіри, що відповідає цьому інтервалу. Отже, експериментатор може розрахувати похибку оцінки істинного значення X з надійністю g .

Зазвичай говорять, що похибка розрахована, наприклад, з довірчою ймовірністю 95%, або з ризиком 5%.

Для розрахунку d за формулою (4) необхідна генеральна дисперсія S_x^2 . Як правило, у експериментатора такі дані відсутні. А за тими, які є в його розпорядженні (3-5 паралельних вимірювань), можливо розрахувати лише оцінку для генеральної дисперсії.

В 1908 році англійський хімік Госсет (Стьюдент) опублікував розподіл, який не залежить від генеральної дисперсії S_x^2 .

Це обумовило розвиток статистики малих вибірок.

В розподілі Стьюдента (t-розподіл) випадковою величиною є величина:

$$t = \frac{[X - \bar{X}] \cdot \sqrt{n}}{S_x} \quad (6)$$

Функція розподілу цієї випадкової величини залежить тільки від числа паралельних вимірювань (n), тобто від об'єму вибірки.

Розроблені таблиці для t – розподілу, якими можна користуватися в процесі розрахунків. Величину t в таблиці знаходять за вибраною величиною ризику (рівню значимості) і числу ступенів свободи (f).

Замінивши величину T на t отримаємо: $d = t \cdot S_x / \sqrt{n}$, або

$$X(x_{\text{найкращ.}}) = \bar{x} \pm t \cdot S_x / \sqrt{n}.$$

Можливо також знайти довірчий інтервал Δ для $(n+1)$ вимірювань. Для цього потрібно скористатися наступною формулою:

$$A = \bar{x} \pm t \cdot S_x \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} \quad (7)$$

Якщо величину $t \cdot S_x \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ позначити як d' , то $A = \bar{x} \pm d'$.

Цікаво прослідкувати, як змінюється довірчий інтервал в залежності від числа паралельних дослідів за відносно близьких значеннях дисперсій і середніх арифметичних:

n	x_i	$\bar{x}$
1	12,5	$\left. \begin{array}{l} 12,0 \\ 12,3 \\ 12,07 \end{array} \right\}$
2	11,5	
3	12,9	
4	11,4	

$$n_1 = 2; f_1 = 1; t_1 = 12,71; S_x^2 = 0,50; d_1 = \pm 6,4.$$

$$n_2 = 3; f_2 = 2; t_2 = 4,30; S_x^2 = 0,52; d_2 = \pm 1,8.$$

$$n_3 = 4; f_3 = 3; t_3 = 3,18; S_x^2 = 0,55; d_3 = \pm 1,2.$$

Результати розрахунків показують, що величина довірчого інтервалу найбільше різко падає за переходу від двох до трьох паралельних вимірювань.

Звідси висновок, що раціонально проводити не менше трьох паралельних вимірювань (число ступенів свободи більше одиниці).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Боженко Л.І. Метрологія, стандартизація, сертифікація та акредитація. – Львів: Афіша, 2006. - 324 с.
2. Маркин Н.С. Основы теории обработки результатов измерений. – М.: Изд-во.стандартов, 1991. - 176 с.
3. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 272 с.
4. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей и результатов измерений. - Л.: Энергоатомиздат, 1985. – 247 с.
5. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений. – М.: Радио и связь, - 1983. -223 с.
6. Сб.задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Под ред.А.А.Свешникова. М.:, Наука, Гл.редакция физ.-матем. лит-ры, - 1970, - 656 с.
7. РМГ 43-2001 Государственная система по обеспечению единства измерений. Применение "Руководства по выражению неопределенности измерений".
8. Долинский Е.Ф. Обработка результатов измерений. – М.: Изд-во.стандартов, 1991. - 191 с.
9. Методические указания к лабораторным работам и контрольные задания по дисциплине «Технология бумаги и картона» / Сост.: Н.С. Астратов, С.Ф. Примаков. - К.: КПИ, 1993. - 84 с.
10. Методичні вказівки до лабораторних робіт з хімії рослинної сировини і целюлози / Укл. Барбаш В.А., Антоненко Л.П., Дейкун І.М. - К.: НТУУ „КПІ”,2003.-70с.
11. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт і контрольних завдань з дисципліни "Технологія целюлози" / Укл. Примаков С.П., Антоненко Л.П., Барабаш В.А., Дейкун І.М., Черьопкіна Р.І. - К.: НУТУ "КПІ",2003.-71.

12. Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. – М.: Наука, 1971. - 176 с.
13. Закон України про метрологію та метрологічну діяльність, № 1765, м. Київ, 15 червня 2004 р.
14. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Наука, 1985. -159 с.
15. Володарський Є.Т., Кухарчук В.В., Поджаренко В.О., Сердюк Г.Б. Метрологічне забезпечення вимірювань і контролю. Навч.посібник для студентів техн.спеціал. ВНЗ. – Вінниця:, Видав. Держ,Технічн.Університету, 2001.-220 с.
16. ДСТУ 3651.2-97 Метрологія. Одиниці фізичних величин. Основні одиниці фізичних величин. Міжнародні системи величин. Основні положення, назви та позначення.
17. Примаков СП., Барбаш В.А. Технологія паперу і картону. К.: ЕКМО, 2002.-396 с.
18. Національна Стратегічна програма розвитку целюлозно-паперової промисловості України до 2020 року, 2006 р.